

ORSAY
Série A, N°
N° D'ordre : 572

N° d'enregistrement
AU C. N. R. S. :
A. O. 4055

ARTICLE PRINCIPAL

RECOUVRANT EN PARTIE

LA THÈSE DE DOCTORAT ÈS SCIENCES PHYSIQUES

PRÉSENTÉE

A LA FACULTÉ DES SCIENCES D'ORSAY
UNIVERSITÉ DE PARIS

PAR

Jacques LECLERC

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES

Sujet de la Thèse : ÉTUDE DU FLOTTEMENT DES COQUES CYLINDRIQUES MINCES DANS LE CADRE
DE LA THÉORIE DU POTENTIEL SUPERSONIQUE LINÉARISÉ.

Soutenue le 12 mars 1970 devant la Commission d'examen

MM. MAZET *Président*
SIESTRUNK } *Examineurs*
GUIRAUD }

GAUTHIER-VILLARS ÉDITEUR

55, quai des Grands-Augustins, Paris 6^e

1970

Étude du flottement des coques cylindriques minces dans le cadre de la théorie du potentiel linéarisé

PREMIÈRE PARTIE :

Détermination des forces aérodynamiques

par

Jacques LECLERC*.

RÉSUMÉ. — On reprend et discute le problème de la prévision du flottement asymétrique des coques cylindriques minces dans un écoulement supersonique linéarisé, en améliorant la schématisation du noyau du potentiel du point de vue de la commodité de recherche du nombre le plus critique ($2n$) de génératrices nodales. On s'attache, en particulier, à représenter correctement ce noyau dans le cas où n est grand, ce qui semble de règle dans les flottements observés expérimentalement. Cette étude comporte deux parties. Les résultats numériques et la comparaison avec l'expérience seront exposés en seconde partie. La première partie présentée ici concerne spécialement l'étude du noyau. On y montre, avec quelque détail, que le noyau stationnaire comme fonction de la distance axiale, tend, lorsque $n \rightarrow \infty$, vers le noyau du panneau plan. On établit ensuite qu'une combinaison linéaire de deux termes exponentiels suffit à le représenter avec une bonne précision quel que soit n , les paramètres de cette expression empirique étant des fonctions lentement variables de n . On en déduit une représentation approchée simple et précise du noyau instationnaire valable pour le problème du flottement, quel que soit n .

ABSTRACT. — The problem of the prediction of cylindrical shell flutter in linearized supersonic flow is reviewed and discussed with a new scheme for the potential kernel which permits an easier research of the critical circumferential wave number n . The emphasis is on a correct representation of the kernel in the case, which is often happening in flutters, where n is large. This work is divided into two parts. Numerical results and comparison with experience will be exposed in the second part. The first part developed here, concerns especially the analytical study of the kernel. It is shown, with some details, that the stationary kernel as function of axial distance

* Chef de Groupe de Recherche à O. N. E. R. A., Châtillon-sous-Bagneux, Hauts-de-Seine.

tends, when $n \rightarrow \infty$, to the panel kernel. Then, it is established that a linear combination of two exponential terms is sufficient to represent this kernel with good approximation, for any value of n , the parameters of this empiric expression being slowly varying functions of x . From this result, a reliable approximated expression of the instationnary kernel is deduced for the flutter problem, and for any value of x .

Notations.

R , rayon extérieur du cylindre;

e , épaisseur de la coque;

L , longueur de l'élément cylindrique;

ν , $\frac{L_2}{L_1}$

U , vitesse à l'infini amont;

M , nombre de mach correspondant;

$\beta = \sqrt{M^2 - 1}$;

$2 \times n$, nombre de génératrices nodales;

ω , pulsation;

$k = \frac{\omega R}{U}$, fréquence réduite;

$O(x', y', z')$, repère cartésien;

r' , distance à l'axe;

$x = \frac{x'}{R}$;

$X = nx$;

$r = \frac{r'}{R}$;

w , déplacement radial;

α , angle d'attaque;

φ_1 , potentiel de vitesse;

x_0 , distance axiale;

$W_{n,0}(x_0)$, noyau du potentiel stationnaire;

$W_n(x_0)$, noyau du potentiel instationnaire;

$\psi(z) = -\frac{K_n(p)}{p K'_n(p)}$;

$V_n(x) = -\mathcal{L}^{-1}[\psi(p)]$;

$U_n(x) = \sum_k e^{p_k x} \frac{p_k}{p_k^2 + n^2}$;

$p = jn\sigma$.



1. Introduction.

Le problème envisagé concerne la prévision théorique du flottement du revêtement de la partie cylindrique des engins évoluant aux vitesses supersoniques. Les viroles d'engins sont constituées habituellement par plusieurs éléments de coques minces juxtaposées par des liaisons rigides dont on peut, en effet, redouter le flottement lorsqu'on sait que ce danger existe, en aéronautique, avec des panneaux plans de voilure. De tels

incidents, toutefois, n'ont pas été enregistrés sur les engins grandeur, mais seulement dans des cas exceptionnels où le flottement était d'ailleurs recherché, à savoir en soufflerie, sur maquettes d'épaisseur réduite $\frac{e}{R}$ de l'ordre de $1/1000$, et d'allongement convenable; néanmoins, depuis une dizaine d'années, autant pour la raison de sécurité que pour éclaircir le mécanisme des flottements trouvés en soufflerie, la théorie du flottement des coques cylindriques a été abordée par bon nombre d'auteurs qui ont schématisé de façons diverses les effets aérodynamiques. Alors que la schématisation du comportement élastique des coques cylindriques minces, comme nous verrons, ne semble plus maintenant donner tellement lieu à discussions, la plupart des auteurs reconnaissent que l'effort principal doit porter sur une meilleure représentation des forces aérodynamiques. Les hypothèses aérodynamiques communes à tous les travaux sur ce sujet admettent l'écoulement non visqueux, encore que Fung et Anderson ([1], [2]) aient discuté et commenté l'effet d'une couche limite; elles admettent l'irrotationnalité de l'écoulement, donc l'existence d'un potentiel. Le potentiel stationnaire au moins au droit du corps cylindrique de l'engin est supposé uniforme et l'on linéarise en instationnaire autour de cet écoulement.

Cette hypothèse ne risque d'être infirmée que si l'on est trop près de l'ogive. Jusqu'à maintenant, les calculs de flottement conduits jusqu'au bout, c'est-à-dire jusqu'à la discussion de la stabilité ont utilisé, à peu près tous, des schématisations extrêmes. Une des plus anciennes est celle de J. W. Miles [3] qui, comme Leonard et Hedgepeth [4], assimile la coque à un cylindre illimité. Pour Miles, l'instabilité se produisait lorsqu'une onde de déformation pouvait se propager à une vitesse égale à celle du fluide diminuée de la vitesse du son. Il envisageait des longueurs d'onde inférieures au rayon, et négligeait la courbure du cylindre. Les ondes envisagées se déplaçaient hélicoïdalement autour du cylindre. Ce travail, déjà ancien, est intéressant par les justifications qu'il donne de la schématisation plane; Les résultats théoriques obtenus, par contre, comme ceux d'Hedgepeth, démontrent que la schématisation par un cylindre indéfini est inacceptable. Elles prévoient, en effet, l'instabilité dans tous les cas pratiques, ce qui est démenti par l'expérience.

Il faut faire une place à part au flottement axisymétrique ou de révolution ($n = 0$) des coques de longueur finie; il a d'abord été présumé le plus critique; puis étudié depuis par Voss [5] et Krumhaar [6], et c'est, en fait, les flottements asymétriques ($n \neq 0$) qui s'avèrent le plus à craindre. Entre temps, les théories asymptotiques du comportement élastique des coques cylindriques minces permettaient l'étude dynamique précise et surtout pratique des coques de longueur finie soumises à un champ de pression instationnaire. La plus classique des schématisations de ce champ de pression est celle de la théorie linéarisée du piston [7],

avec la simplification supplémentaire qui consiste à négliger l'amortissement aérodynamique. Le terme C_p a la phase du déplacement transversal local. On justifie habituellement la schématisation par le « piston » en alléguant que le domaine pratique du mach est largement supersonique, encore que le domaine hypersonique ($M \geq 4$) n'en soit pas justifiable pour des raisons de non-linéarité. Une autre schématisation brutale est celle de Holt et Strack [8] qui garde la simplification de quasi-stationnarité de C_p : elle consiste à remplacer le noyau du potentiel par une fonction linéaire, linéarisation exigeant, pour être admissible, que $\frac{L}{\beta R}$ soit dérisoirement petit si l'on suppose le nombre $2n$ de génératrices nodales égal ou supérieur à (2×6) .

Plus récemment Davies [9] et Dzygadło [10] ont fait un développement du noyau du potentiel suivant la distance axiale, limité aux premiers termes, en ayant renoncé à la simplification de la quasi-stationnarité. Dzygadło s'est arrêté au troisième terme du développement; Davies envisage d'aller plus loin, mais aucun résultat numérique ne paraît avoir été publié jusqu'à ce jour. L'écueil, de toute façon, est analogue à celui rencontré avec la schématisation de Holt; pour des valeurs de n de l'ordre de 8 ou 10, l'approximation polynomiale ne peut convenir qu'à des cylindres extrêmement courts.

Divers auteurs ont signalé, indépendamment les uns des autres ([11], [12], [13]), que le noyau stationnaire se déduisait du noyau stationnaire par une transformation du type de Magnaradzé. La principale étude du noyau stationnaire, conduisant à des tables, est de Randall [14]. Ces tables expriment le noyau comme fonction de la distance axiale jusqu'à $n = 10$. La lourdeur des calculs partant de l'utilisation de ces tables et de la transformation indiquée ci-dessus, pour parvenir à l'évaluation des forces généralisées, est prohibitive. Steerman a suggéré l'emploi de la technique de Luke [15]. Celui-ci s'est penché sur l'étude de l'approximation du noyau stationnaire.

Il propose une approximation rationnelle des fonctions $K_n(z)$ pour z assez grand et aboutit à une approximation du noyau consistant en une série d'exponentielles contenant au moins n termes. Celle-ci pour être précise jusqu'à des valeurs assez grandes de la distance axiale doit comporter un nombre suffisant de termes, supérieur ou égal à n . Cette méthode n'a encore donné lieu à aucune publication de forces aérodynamiques et conduit, paraît-il, encore à des calculs numériques considérables.

Le travail le plus récent et le plus intéressant annonçant des résultats prochains de forces généralisées pour divers rapports $\frac{R}{L}$ jusqu'à $n = 9$, est sans doute celui de Earl H. Dowell et Sheila E. Widnall [16]. Le principe de leur méthode s'apparente au principe, également applicable au problème du panneau plan rectangulaire, et dont nous aurons l'occasion

de parler, qui se fonde sur la remarque suivante : Une force généralisée est le produit scalaire à deux dimensions d'une fonction de base simple et du produit, par un opérateur de la forme $\left(A + \frac{\partial}{\partial x}\right)$, de la convolution du noyau du potentiel et d'une fonction liée simplement à une autre fonction de base. Si l'on fait alors intervenir les transformées de Fourier du noyau et des fonctions de base (à support borné), on se ramène, en utilisant en particulier la propriété d'invariance des produits scalaires par la T. F., à une seule intégrale pour le calcul de la force généralisée; celle-ci ne faisant intervenir que le noyau transformé et des fonctions obtenues assez simplement à partir des T. F. des fonctions de base. En faisant, en fait, intervenir la transformation de Laplace uniquement, les auteurs obtiennent un résultat de même type où les T. L. remplacent les T. F. Le principal bénéfice est de supprimer deux intégrations pour calculer les forces généralisées; les autres méthodes passent, en effet, par les calculs intermédiaires du noyau du potentiel, puis de la pression. La grande difficulté qui subsiste toutefois est le calcul de l'unique intégrale donnant une expression de la force généralisée, dont le contour d'intégration est un contour de Bromwich encerclant un nombre de pôles égal (à 1 près) à n .

Or il faut insister sur le fait que les modes de flottement que l'on peut rencontrer, et nous en verrons la raison, se caractérisent par un nombre n pouvant facilement dépasser 20, et l'étude de la stabilité exige évidemment un balayage en x . Les travaux les plus récents recherchent avec raison la précision dans l'évaluation, des forces aérodynamiques; les calculs faits montrent qu'une grande précision est, en effet, nécessaire pour juger de la stabilité; mais un autre problème essentiel est de déterminer, toujours avec la meilleure précision possible, une expression commode suffisamment précise du noyau du potentiel ou de la pression pour les grandes valeurs de x . Ce problème fera l'objet de la première partie de cet exposé, l'autre concernera l'analyse du flottement et présentera les résultats numériques, la matière de l'ensemble devant faire l'objet d'une thèse de doctorat ès Sciences. Dans la première partie, on étudiera le comportement asymptotique du noyau du potentiel comme fonction de la distance axiale lorsque n augmente indéfiniment. On démontrera qu'alors le noyau du potentiel tend vers celui du problème du panneau plan ou du cylindre développé : la courbure n'intervient plus. On notera d'autre part, que le noyau stationnaire fourni par les tables de Randall pour $0 < n \leq 10$ peut être représenté pour $\frac{nx'}{\beta R} < 20$, avec une précision remarquable, par le produit d'une fonction sinus et d'une somme de deux exponentielles à arguments négatifs; bien plus, on peut approcher chacun des coefficients et exposants entrant dans cette expression par une fonction simple de n , de sorte que le noyau se trouve bien représenté non seulement pour toutes les valeurs de $n \geq 3$ des tables de Randall,

mais aussi pour $n = \infty$. En fait, il s'agit d'un lissage entre les valeurs de Randall et le cas $n = \infty$.

Comme ces fonctions de lissage en n sont extrêmement plates, on peut considérer que l'interpolation est sûre. On montrera, ensuite, que l'on peut remplacer la transformation de Magnaradzé par une approximation très simple n'amenant pas de perte de précision pour $\frac{k}{n} \lesssim 1$, k désignant la fréquence réduite; c'est-à-dire valable dans le domaine des flottements d'intérêt pratique.

Disposant alors d'un noyau instationnaire approché de forme analytique simple, la méthode de Gauss, à condition de prendre un nombre suffisant de points d'intégration, conservera la précision au cours des intégrations nécessaires pour obtenir pression et forces généralisées. Les diverses fonctions qui interviennent dans les intégrations, ayant toutes des définitions mathématiques simples, l'introduction d'un nombre convenable de points d'intégration amène rapidement la convergence vers la valeur exacte de chaque intégrale.

De nombreux calculs numériques ont été effectués avec cette méthode. Ils seront présentés dans la deuxième partie ainsi que la comparaison avec les résultats d'essais de Fung et de son équipe [17]. Cette deuxième partie sera essentiellement consacrée à l'analyse des flottements asymétriques ($n \neq 0$) dans le cadre de la théorie élastique linéaire. Les divers calculs appliqués à des cylindres analogues à celui de Fung montrent que les flottements de cylindre sont, en général, très peu explosifs et voisins du flottement à un seul degré de liberté.

2. Schématisation par la théorie du potentiel linéarisée.

2.1. JUSTIFICATION DU SCHÉMA.

Si l'ogive est suffisamment allongée et la trajectoire de l'engin rectiligne, il est raisonnable de supposer que l'écoulement stationnaire est uniforme en dehors de la couche limite. Pour l'effet de cette couche, les résultats expérimentaux plans et leurs interprétations par des modèles théoriques [18] incitent à admettre, avec Fung et Anderson [1], l'amortissement sélectif des modes de flexion supérieurs, et un effet négligeable sur les premiers modes de flexion. D'après ces auteurs, E désignant l'épaisseur de la couche limite, et m l'ordre du mode de flexion propre considéré, la déformée en vibration étant un mode asymétrique en $\cos n\theta$ (θ désignant l'azimuth), plus le produit $m \frac{E}{L}$ est petit, moins l'effet de la couche limite est sensible : cela correspond bien à un amortissement sélectif des modes supérieurs.

L'écoulement stationnaire étant supposé à potentiel et uniforme, la linéarisation entraîne également l'existence d'un potentiel instationnaire.

Le problème aérodynamique se ramène au calcul de ce potentiel extérieur. En considérant le cône de Mach avant, on voit que celui-ci doit être borné à l'infini; sa dérivée normale sur le cylindre est définie par le mouvement transversal supposé imposé à la coque. En fait, il faudrait tenir compte également, pour l'étude du flottement, de la répartition de pression instationnaire intérieure; mais cet effet est négligeable si la fréquence de flottement est suffisamment inférieure à la plus basse fréquence de résonance de la cavité, laquelle a pour ordre de grandeur, si la coque est vide, $f \simeq \frac{a}{R}$, a désignant la vitesse du son du fluide à l'intérieur. Dans l'éventualité d'un flottement asymétrique, cette condition se trouve réalisée en général, et particulièrement, dans les exemples traités numériquement. L'explicitation analytique du potentiel pour une vibration transversale imposée à la coque est immédiate à partir de la transformation de Laplace; la grande difficulté consiste essentiellement dans le calcul numérique commode et précis du noyau du potentiel puis de la pression et des forces généralisées, pour n'importe quelle valeur de n éventuellement grande.

2.2. POSE DU PROBLÈME. CONDITIONS AUX LIMITES.

On suppose la coque cylindrique de longueur L finie (*fig. 1*). Le système d'axes choisi a son origine dans la section amont de la coque. U désignant la vitesse de l'engin par rapport au fluide supposé au repos à l'infini, soit $U(x' + \varphi_1)$ le potentiel des vitesses, φ_1 définissant alors le potentiel de perturbation. En coordonnées cylindriques, φ_1 satisfait à l'équation

$$(1) \quad \frac{1}{r'^2} \varphi_{1\theta\theta} + \varphi_{1r'r'} + \frac{1}{r'} \varphi_{1r''} - \beta^2 \varphi_{1x'x'} - 2 \frac{M}{c} \varphi_{1x't'} - \frac{1}{c^2} \varphi_{1t't'} = 0.$$

Les conditions aux limites auxquelles doit satisfaire φ_1 sont les suivantes :

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \varphi_1 = 0 & \text{pour } x' \leq 0; \\ \varphi_1 \rightarrow 0 & \text{pour } \left\{ \begin{array}{l} x' > 0, \\ r' \rightarrow \infty; \end{array} \right. \\ \varphi_{1r'} = \frac{1}{U} \frac{dw}{dt'} & \text{pour } \left\{ \begin{array}{l} x' = 0, \\ r' = R; \end{array} \right. \end{array} \right.$$

w désignant le déplacement radial de la paroi cylindrique.

Soient x et r les coordonnées sans dimension rapportées au rayon extérieur (qu'on confondra plus loin avec le rayon moyen) :

$$x = \frac{x'}{R}; \quad r = \frac{r'}{R}.$$

La fréquence réduite sera $k = \frac{\omega R}{U}$, ω désignant la pulsation de la vibration sinusoïdale envisagée.

La théorie des coques confirme l'idée intuitive qu'une répartition de pression extérieure en $\cos n\theta$ entraîne une déformation radiale également en $\cos n\theta$.

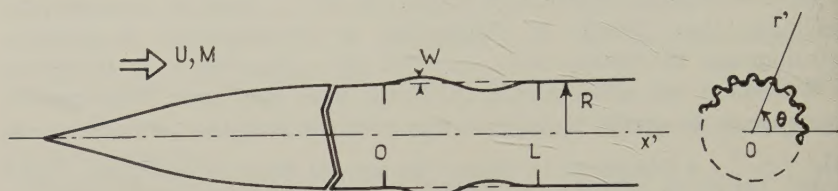


Fig. 1.

L'absence d'un couplage aérodynamique entre les formes de vibration à valeurs distinctes de n amène donc à se limiter aux vibrations radiales de la forme

$$(3) \quad w = w_n(x) \cos(n\theta) e^{j\omega t'},$$

auxquelles correspond le potentiel φ_1 de la forme

$$(4) \quad \varphi_1 = \varphi(x, \theta, r) e^{j\omega t'},$$

où

$$(4') \quad \varphi = R f_n(x, r) \cos n\theta.$$

L'équation (1) s'écrit alors

$$(1') \quad \frac{1}{R^2} \left[\varphi_{rrr} - \beta^2 \varphi_{xx} + \frac{1}{r^2} \varphi_{\theta\theta} + \frac{1}{r} \varphi_r - 2jkM^2 \varphi_x + k^2 M^2 \varphi \right] = 0$$

et, d'après (4') :

$$(5) \quad -\beta^2 f_{nxx} + f_{nrr} + \frac{1}{r} f_{nr} - 2jkM^2 f_{nx} + \left(k^2 M^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) f_n = 0.$$

Les conditions (2) s'écrivent

$$(2') \quad \left\{ \begin{array}{l} f_n(x, r) = 0 \quad \text{pour } x \leq 0; \\ f_n(x, r) \rightarrow 0 \quad \text{pour } \left\{ \begin{array}{l} x > 0, \\ r \rightarrow \infty; \end{array} \right. \\ \frac{U}{R} R f_{nr}(x, 1) = \frac{U}{R} w_{nx}(x, 1) + j\omega w_n(x, 1) \\ \text{ou} \\ R f_{nr}(x, 1) = w_{nx}(x, 1) + jk w_n(x, 1) \\ \text{pour } 0 < x < \lambda = \frac{L}{R} \quad \text{et} \quad r = 1. \end{array} \right.$$

2.3. EXPRESSION DU NOYAU DU POTENTIEL.

Surlignons les transformées de Laplace, et soient donc

$$\bar{f}_n(p, r) = \mathcal{L} f_n(x, r) = \int_0^\infty e^{-px} f_n(x, r) dx,$$

$$\bar{w}_n(p, r) = \mathcal{L} w_n(x, r).$$

$f_n(p, r)$ satisfait d'après Fraenkel [19] à la transformée de l'équation (5) :

$$(6) \quad \bar{f}_{nrr} + \frac{1}{r} \bar{f}_{nr} - \left(q^2 + \frac{n^2}{r^2} \right) \bar{f}_n = 0,$$

où

$$(7) \quad q^2 = \beta^2 p^2 - k^2 M^2 + 2jkM^2 p.$$

On reconnaît (6) l'équation de Bessel modifiée.

D'après (2'), $f_n(x, r) \rightarrow 0$ quand $r \rightarrow \infty$ et pour $x > 0$. Il en est donc de même pour $\bar{f}_n(p, r)$ quand $r \rightarrow \infty$. Comme les solutions de (6) sont de la forme

$$(8) \quad \bar{f}_n(p, r) = A_n(p) K_n(qr) + B_n(p) I_n(qr),$$

on voit que $B_n(p)$ est nécessairement nul.

On élimine $A_n(p)$, en utilisant (2') qui entraîne

$$R \bar{f}_n(p, 1) = (p + jk) \bar{w}_n(p, 1).$$

Il vient ainsi

$$(9) \quad R \bar{f}_n(p, r) = \frac{K_n(qr)}{q K'_n(q)} (p + jk) \bar{w}_n(p).$$

Désignons par $W_n(x, r)$ la fonction originale de $K_n(qr) [q K'_n(q)]^{-1}$. D'après (9) :

$$(10) \quad R f_n(x, r) = \int_0^x W_n(x-u, r) [w'_n(u) + jk w_n(u)] du.$$

Le terme entre crochets est le produit par R de l'angle d'attaque local; on désignera celui-ci par $\alpha_n(x)$ dans la suite. Ainsi donc, le noyau portant sur l'angle d'attaque est la fonction $W_n(x, r)$ dont la transformée de Laplace est

$$(11) \quad \mathcal{L} W_n(x, r) = \frac{K_n(qr)}{q K'_n(q)}.$$

N. B. — Pour traiter le problème de l'écoulement à l'intérieur du cylindre, on remplacerait la condition

$$f_n(x, r) \rightarrow 0 \quad \text{pour } x > 0, \quad r \rightarrow \infty,$$

par la condition

$$f_n(x, r) \text{ borné} \quad \text{pour } r \rightarrow 0,$$

donc aussi :

$$\bar{f}_n(p, r) \text{ borné pour } r \rightarrow 0;$$

et cela entraîne

$$A_n(p) = 0.$$

Le reste du calcul est formellement le même. Dans le problème de la recherche du potentiel intérieur instationnaire linéarisé autour de l'écoulement uniforme, il suffit d'échanger les fonctions K_n et I_n .

Dans les calculs des forces aérodynamiques, il nous suffit de disposer de $\varphi(x, 1)$. Comme il n'y a pas confusion possible, nous emploierons la notation $W_n(x_0)$ pour désigner le noyau lorsque $r = 1$, x_0 désignant la distance axiale.

$$x_0 = x - u$$

dans la formule (10). D'après le théorème de la conversion :

$$(12) \quad W_n(x_0) = \frac{1}{2j\pi} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \frac{K_n(q)}{q K'_n(q)} e^{p x_0} dp,$$

où

$$p = c + jp_1,$$

c désignant un réel positif.

Cette formule de conversion montre qu'on peut remplacer, pour $r = 1$, la solution élémentaire par une superposition de produits $K_n(q)[q K'_n(q)]^{-1}$ par des exponentielles en x_0 . Ces produits correspondent aux potentiels relatifs aux ondes de déplacement de Miles si l'on fait tendre c vers zéro.

Le problème essentiel est le calcul correct de cette intégrale pour des valeurs de x éventuellement grandes.

2.4. RELATION ENTRE LES NOYAUX STATIONNAIRE ET INSTATIONNAIRE.

Posons $p' = p + j \frac{k M^2}{\beta^2}$, alors, d'après (7) :

$$q = \beta \sqrt{p'^2 + \left(\frac{k M}{\beta^2}\right)^2}$$

et l'on peut écrire l'expression (12) sous la forme équivalente :

$$(12') \quad W_n(x_0) = e^{-j \frac{k M^2}{\beta^2} x_0} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \frac{K_n(q)}{q K'_n(q)} e^{p' x} dp',$$

où q a l'expression précédente en fonction de p' . Or, d'après (12), si l'on désigne par $W_{n,0}(x_0)$ l'expression du noyau stationnaire pour $r = 1$:

$$(13) \quad W_{n,0}(x_0) = \frac{1}{2j\pi} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \frac{K_n(\beta p')}{\beta p' K'_n(\beta p')} e^{p' x_0} dp'.$$

Le facteur de $e^{-j \frac{k M^2}{\beta^2} x_0}$ dans (12') est $\mathcal{L}^{-1} \frac{K_n(q)}{q K'_n(q)}$, tandis que $K_n(\beta p') [\beta p' K_n(\beta p')]^{-1}$ est égal à $\mathcal{L} W_{n,0}(x_0)$. Or, s'il suffit de changer p' en $\sqrt{p'^2 + \left(\frac{k M}{\beta^2}\right)^2}$ dans l'expression de $\mathcal{L} W_{n,0}(x_0)$ pour obtenir $K_n(q) [q K'_n(q)]^{-1}$, il en résulte d'après une transformation fonctionnelle connue en mathématiques et utilisée déjà par Magnaradzé pour les écoulements supersoniques [19], que $\mathcal{L}^{-1} \frac{K_n(q)}{q K'_n(q)}$, c'est-à-dire $W_n(x_0)$, a pour expression

$$(14) \quad W_n(x_0) = e^{-j \frac{k M^2}{\beta^2} x_0} \left[W_{n,0}(x_0) - \frac{k M}{\beta^2} \int_0^{x_0} W_{n,0}(\sqrt{x_0^2 - u^2}) J_1\left(\frac{k M}{\beta^2} u\right) du \right].$$

2.5. PROPRIÉTÉS DU NOYAU STATIONNAIRE.

Le développement limité en $\frac{x_0}{\beta}$ de $W_{n,0}(x_0)$ peut se déduire directement du développement asymptotique de $\mathcal{L} W_{n,0}(x)$ par le lemme de Watson. En faisant, par exemple, le quotient des développements asymptotiques de $K_n(\beta p)$ et de $\beta p K'_n(\beta p)$ (il existe d'autres méthodes que nous verrons plus bas), il vient, n étant fixe

$$(15) \quad - \frac{K_n(\beta p)}{\beta p K'_n(\beta p)} \sim \frac{1}{\beta p} - \frac{1}{2 \beta^2 p^2} - \left(\frac{n^2}{2} - \frac{3}{8}\right) \frac{1}{\beta^3 p^3} + \dots,$$

et il en résulte

$$(16) \quad - W_{n,0}(x_0) = \frac{1}{\beta} \left[1 - \frac{2}{2 \Gamma(2)} \frac{x}{\beta} - \left(\frac{n^2}{2} - \frac{3}{8}\right) \frac{1}{\Gamma(3)} \left(\frac{x}{\beta}\right)^2 + \dots \right].$$

Si β est grand, et $L\beta^{-1}$ petit, on peut se limiter au premier terme du développement, et le noyau est équivalent à un échelon d'intensité $\frac{1}{\beta}$. C'est le résultat auquel aboutit pour M grand le schéma du « piston » abondamment exploité par Johns, Fung et son équipe pour donner une interprétation de flottements trouvés à Mach 3.

L'approximation linéaire, c'est-à-dire correspondant au deuxième terme de (16), ne correspond pas précisément à celle de Holt et Strack, car ces auteurs prennent une droite moyenne pour représenter $W_{n,0}(x_0)$ et non la tangente en $x_0 = 0$ de la courbe $W_{n,0} = W_{n,0}(x_0)$. Comme nous l'avons signalé, divers auteurs ont remplacé $-W_{n,0}(x_0)$ par son développement (16) plus ou moins limité. On voit bien qu'il ne peut être question de restituer l'allure pseudo-périodique et décroissante de la courbe $W_{n,0}(x_0)$ avec un polynôme à moins de prendre un nombre prohibitif de termes dans (16), surtout si $\frac{L}{R} n$ n'est pas petit et si n est grand.

2.6. EFFET DE L'ALLONGEMENT.

Supposons n fixé non grand ainsi que R , et modifions L , toutes choses égales par ailleurs. Soit $\nu = \frac{L_2}{L_1}$; considérons le changement de variable $\zeta = \frac{x}{\nu}$ appliqué à la fonction de déformation transversale : $w_n(\zeta) = w_n\left(\frac{x}{\nu}\right)$, ν définit une anamorphose. Surlignons d'un tilde les transformées de Laplace des fonctions de ζ ; soit

$$\tilde{w}_n(p) = \mathcal{L}\left[w_n\left(\frac{x}{\nu}\right)\right],$$

$$\tilde{f}_n(p) = \mathcal{L}\left[f_n\left(\frac{x}{\nu}\right)\right].$$

D'après (9), si $k = 0$:

$$R\bar{f}_n(p_1) = \frac{K_n(\beta p_1)}{\beta p_1 K'_n(\beta p_1)} p_1 \bar{W}_n(p_1).$$

En raison de la définition, quel que soit $g(\zeta) = g\left(\frac{x}{\nu}\right)$ admettant une T. L. :

$$\tilde{g}(p) = \nu \bar{g}(\nu p) \quad \text{ou} \quad \tilde{g}(p_1) = \frac{1}{\nu} \bar{g}\left(\frac{p_1}{\nu}\right)$$

et en substituant dans la relation donnant $\bar{f}_n(p_1)$, on a

$$\nu R\tilde{f}_n(p) = \frac{K_n\left(\frac{\beta p}{\nu}\right)}{\frac{\beta p}{\nu} K'_n\left(\frac{\beta p}{\nu}\right)} p \tilde{w}_n(p),$$

or $\frac{K_n(x)}{x K'_n(x)}$ pour $x > 0$ est borné et tend vers $-\frac{1}{n}$ pour $x \rightarrow 0$; d'autre part $p \tilde{w}_n(p)$ est la transformée de $W'_n(\zeta)$. Elle tend vers zéro, si $w'_n(\zeta)$ reste borné, lorsque $p \rightarrow \infty$. Il est facile alors de voir que si ν devient très grand :

$$\nu R\tilde{f}_n(p) \sim -\frac{1}{n} \mathcal{L}[w'_n(\zeta)]$$

et donc que :

$$\nu R f_n(\xi) \rightarrow -\frac{1}{n} w'_n(\xi).$$

C'est l'approximation des corps élancés.

On peut interpréter ce résultat autrement. Plaçons-nous dans le cas où la déformée $w_n(x)$ est sinusoïdale de longueur d'onde proportionnelle à ν supposé très grand. On peut écrire

$$R f_{n,0}(x) = \int_0^x W_{n,0}(x_0) w'_n(x - x_0) dx_0.$$

Considérons le cas où x est de l'ordre de ν . Si l'on exclut les voisinages des extrêmums de l'onde, $w'_n(x - x_0)$ est monotone pour $x_0 < X < x$, X étant supposé grand.

L'intégrale écrite ayant un sens si grand que soit x , on peut écrire

$$Rf_{n,0}(x) = \int_0^X W_{n,0}(x_0) w'_n(x - x_0) dx_0 + \varepsilon(x, X),$$

où $\varepsilon(x, X)$ est petit, par rapport à l'amplitude de l'onde. D'après le théorème de Weierstrass :

$$\begin{aligned} & \int_0^X W_{n,0}(x_0) w'_n(x - x_0) dx_0 \\ &= w'_n(x) \int_0^{x'} W_{n,0}(x_0) dx_0 + w'_n(x - X) \int_{x'}^X W_{n,0}(x_0) dx_0, \end{aligned}$$

où $0 < x' < X$.

On peut choisir X grand de sorte que $w'_n(x - X)$ soit encore voisin de $w'_n(x)$. Comme les intégrales du second membre sont bornées, on peut écrire

$$\begin{aligned} Rf_{n,0}(x) &= w'_n(x) \int_0^X W_{n,0}(x_0) dx_0 + \varepsilon_1 \\ &= w'_n(x) \int_0^\infty W_{n,0}(x_0) dx_0 + \varepsilon_2, \end{aligned}$$

ε_1 et ε_2 étant petits comme $\varepsilon(x, X)$. Or

$$(17) \quad \int_0^\infty W_{n,0}(x_0) dx_0 = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{K_n(\beta p)}{\beta p K'_n(\beta p)} = -\frac{1}{n}.$$

Ainsi : $Rf_{n,0}(x) = -\frac{1}{n} w'_n(x)$. Ce résultat valable en dehors des extrêmums de $w'_n(x)$, l'est encore dans leurs voisinages.

2.7. ANALOGIE DES EFFETS n GRAND OU ν GRAND.

L'approximation précédente est encore valable si L et R étant fixés, c'est n que l'on fait croître indéfiniment. Précédemment, le noyau $W_{n,0}(x_0)$ se comportait comme la distribution $-\frac{1}{n}(x_0)$ parce que les fonctions arguments considérées étaient d'autant moins variables en x que ν était grand (d'où le changement de variable $\frac{x}{\xi}$); maintenant, sauf pour des fonctions arguments w'_n très rapidement variables en x , le noyau $W_{n,0}(x_0)$ se comporte encore comme la distribution $-\frac{1}{n}\delta(x_0)$, et cela parce que la fonction $W_{n,0}(x_0)$ est, elle, très rapidement décroissante; ce que nous

démontrerons. Si cela est admis, alors, on peut reprendre exactement le raisonnement précédent, x et X étant, cette fois, finis, non grands; on aboutit au même résultat

2.8. APPROXIMATION DE LA TRANSFORMÉE DE LAPLACE AUX GRANDES VALEURS DE n .

Miles envisageant l'approximation des corps élancés (ν grand) préconise, pour $n \neq 0$, une approximation de $\bar{W}_{n,0}(p)$, qui lui permet de justifier l'approximation plane, c'est-à-dire de négliger la courbure du cylindre et de le traiter comme un panneau plan. Il indique [3] que $\psi(z) = \frac{K_n(z)}{z K'_n(z)}$ pour z grand et n fixé, est bien représenté par $-(n^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}}$, et que cette approximation tend vers $-\frac{1}{n}$ pour z petit, sans approfondir le cas des autres valeurs de z . Nous établirons, dans la suite, que cette approximation est une limite asymptotique pour n infiniment grand, quel que soit $\mathcal{R}(z) > 0$.

La fonction $K_n(z)$ satisfait à l'équation de Bessel modifiée :

$$z^2 \frac{d^2 K_n}{dz^2} + z \frac{dK_n}{dz} - (z^2 + n^2) K_n = 0.$$

En faisant le changement de variable $K_n = \frac{u}{\sqrt{z}}$, il vient

$$z^2 u'' - \left[z^2 + n^2 - \frac{1}{4} \right] u = 0,$$

le terme en u' manque. Soit

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= \frac{1}{\psi(z)} = \frac{z K'_n}{K_n} = z \left(\frac{u'}{u} - \frac{1}{2z} \right) = z \frac{u'}{u} - \frac{1}{2}, \\ \varphi' &= \frac{u'}{u} + z \left(\frac{u''}{u} - \left(\frac{u'}{u} \right)^2 \right) \end{aligned}$$

et en utilisant l'équation en u pour exprimer $\frac{u''}{u}$, puis en éliminant $\frac{u'}{u}$ à partir de l'expression de φ :

$$\varphi' = \frac{\varphi + \frac{1}{2}}{z} + z \left[1 + \frac{n^2 - \frac{1}{4}}{z^2} - \left(\frac{\varphi + \frac{1}{2}}{2} \right)^2 \right]$$

ou

$$(18) \quad z\varphi' + \varphi^2 - (n^2 + z^2) = 0,$$

donc

$$(19) \quad z\psi' + (n^2 + z^2)\psi^2 - 1 = 0.$$

Ce sont des équations de Riccati. Ce résultat est indiqué par Miles [3]. Dans cet article, l'auteur n'approfondit pas le comportement des solutions lorsque n augmente indéfiniment, mais se borne à constater que le premier membre de (19) est moindre, quel que soit $n \neq 0$, lorsqu'on choisit $\psi = -(n^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}}$ au lieu de $-z^{-1}$ lorsque z est infiniment grand, et que cette expression a pour valeur $-\frac{1}{n}$ lorsque $z = 0$, ce qui est la bonne valeur de $\psi(0)$. Nous analyserons de plus près les solutions de (18) et (19).

L'équation (19) présente comme seules singularités des singularités fixes. Elle est, en effet, de Riccati, et ses singularités mobiles ne pourraient être que des pôles; or, l'équation satisfaite par la fonction inverse est précisément (18), et l'on ne peut avoir $\varphi = 0$ pour $z = 0$. Les seuls points singuliers sont donc :

$$z = 0, \quad \psi = \pm \frac{1}{n}$$

et

$$z = \infty, \quad \psi = 0.$$

La solution $\psi = \frac{K_n(z)}{z K'_n(z)}$ a bien un point singulier transcendant en $z = 0$ où $\psi(0) = -\frac{1}{n}$. Le point singulier $z = 0$; $\psi = -\frac{1}{n}$ de (19) concerne le problème intérieur avec la solution

$$\psi = \frac{I_n(z)}{z I'_n(z)}.$$

Posons

$$Z = \frac{z}{n} \quad \text{et} \quad \psi = \frac{1}{n} F(Z).$$

L'équation (19) devient alors

$$(20) \quad \frac{Z}{n} F'(Z) + (1 + Z^2) F^2 - 1 = 0.$$

Elle est singulière au point ($z = 0$; $F = 1$), et se ramène, n étant entier positif, à la forme de Briot et Bouquet [24]. En suivant la méthode de ces auteurs, on peut développer $F(Z)$ autour de l'origine en une série entière limitée, en (Z^2) , finissant par $Z^{2(n-1)}$, ajoutée à une série double en $Z^m \log^n(Z)$, où $m \geq 2n$. Les coefficients des termes de la série entière sont alors rationnels en $\frac{1}{n}$, et il est facile d'établir que les séries tronquées à un rang donné, extraites de la série entière, convergent uniformément, lorsque $n \rightarrow \infty$, vers les développements correspondants de la fonction $F_1(Z)$ satisfaisant à

$$(21) \quad (1 + Z^2) F_1^2 - 1 = 0,$$

c'est-à-dire à l'équation (20) où l'on a supprimé le premier terme, dont le coefficient est $\frac{1}{n}$.

Pour l'autre singularité, posons

$$U = \frac{u}{z} \quad \text{et} \quad \psi = \frac{1}{n} G(U).$$

L'équation (20) devient

$$(22) \quad -n^{-1} U^{-3} G' - (1 + U^2) G^2 - U^2 = 0.$$

Elle est singulière à l'origine ($U = 0$; $G = 0$). Elle possède deux solutions holomorphes autour de l'origine. Les développements limités à un rang donné, rationnels en $\frac{1}{n}$, convergent uniformément, lorsque $n \rightarrow \infty$, vers ceux relatifs à la fonction G_1 satisfaisant à

$$(23) \quad (1 + U^2) G_1^2 - U^2 = 0,$$

c'est-à-dire à l'équation (22) où l'on a supprimé le premier terme dont le coefficient est $-n^{-1}$.

Le rapprochement de (21) et (23) montre que les développements, limités respectivement aux puissances entières de z et de $\frac{1}{z}$ de $\psi(z)$, autour de $z = 0$ et $z = \infty$, convergent respectivement vers les développements limités correspondants de la fonction $-(n^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}}$.

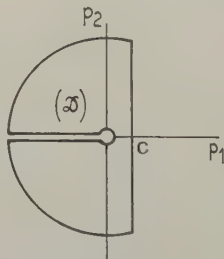


Fig. 2.

Le problème de la définition des domaines de convergence uniforme de $\psi(z)$ vers cette fonction, lorsque $n \rightarrow \infty$, reste toutefois délicat, aussi nous exploiterons maintenant la formule de Randall pour cette étude.

2.9. RÉSULTATS DE RANDALL.

Considérons le domaine (fig. 2) de Bromwich ($\mathcal{D}$) comportant une entaille suivant la partie négative de l'axe réel et un lacet entourant l'origine point critique de l'intégrande de l'expression (12') de $W_{n,0}(x_0)$. Randall applique le théorème de Cauchy à la fonction intégrande uniforme

dans (ω) . Comme l'intégrale sur l'arc circulaire tend vers zéro lorsque le rayon augmente indéfiniment, c étant suffisamment petit, parce que, $\beta|p|$ étant assez grand, l'intégrande tend vers $-e^{p x_0}(\beta p)^{-1}$, il résulte

$$(24) \quad W_{n,0}(x_0) = \sum [\text{résidus dans } (\omega)] \\ + \frac{1}{2j\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-p x_0}}{\beta p} \left\{ \frac{K_n(\beta p e^{-j\pi})}{K'_n(\beta p e^{-j\pi})} - \frac{K_n(\beta p e^{j\pi})}{K'_n(\beta p e^{j\pi})} \right\} dp.$$

Comme $K_n(\beta p e^{\pm j\pi}) = (-1)^n K_n(\beta p) \pm j\pi I_n(\beta p)$, le terme entre accolades devient, réduction au même dénominateur faite, une fraction dont le numérateur est précisément le wronskien de $K_n(\beta p)$ et de $I'_n(\beta p)$, égal à $\frac{1}{\beta p}$. D'autre part, les seuls pôles dans (ω) étant les zéros p_k de $K'_n(\beta p)$, les résidus ont pour expression $e^{p_k x_0} K_n(\beta p_k) [\beta p_k K''_n(\beta p_k)]^{-1}$; mais, d'après l'équation de Bessel :

$$0 = \beta^2 p_k^2 K''_n(\beta p_k) + \beta p_k K'_n(\beta p_k) - [\beta^2 p_k^2 + n^2] K_n(\beta p_k) \\ = \beta^2 p_k^2 K''_n(\beta p_k) - [\beta^2 p_k^2 + n^2] K_n(\beta p_k),$$

chaque résidu a donc pour expression équivalente : $\frac{e^{p_k x_0}}{\beta} \frac{\beta p_k}{\beta^2 p_k^2 + n^2}$, et finalement :

$$(25) \quad W_{n,0}(x_0) = \sum_k \frac{e^{p_k x_0}}{\beta} \frac{\beta p_k}{\beta^2 p_k^2 + n^2} + (-1)^n \int_0^\infty \frac{e^{-p x_0} dp}{\beta^2 p^2 [K_n'^2 + \pi^2 I_n'^2(\beta p)]}.$$

Randall a donné des tables de la fonction

$$(26) \quad V_n(x) = -\beta W_n(\beta x)$$

dont la T. L. est

$$\mathcal{L}^2 V_n(x_0) = -\psi(p) = -\frac{K_n(p)}{p K'_n(p)}.$$

Les valeurs de n considérées vont de 0 à 10; celles de x (correspondant à $\frac{x_0}{\beta}$) sont également espacées et vont de zéro jusqu'à rendre $V_n(x)$ petit devant 1.

La fonction $V_n(x)$ présente des oscillations décroissantes; elle est maximale à l'origine ou elle a la valeur 1 d'après (34) et le développement (16).

3. Étude asymptotique du noyau stationnaire comme fonction de x_0 lorsque $n \rightarrow \infty$.

3.1. INTÉRÊT DE CETTE ÉTUDE.

Nous avons vu que si l'on admettait que la fonction $W_{n,0}(x_0)$ décroît rapidement vers zéro, lorsque $n \rightarrow \infty$, $W_{n,0}(x_0)$ se comporte, en tant que

distribution, comme $-\frac{1}{n} \delta(x_0)$ à l'égard des fonctions arguments $\alpha(x)$ à dérivée bornée. Il est donc important d'établir de quelle façon $W_{n,0}(x_0)$ oscille et décroît avec x_0 lorsque $n \rightarrow \infty$; c'est encore plus nécessaire si l'on prétend représenter $W_n(x_0)$ comme fonction de x_0 , quel que soit n , car il faudra se raccorder au cas $n = \infty$.

L'étude du comportement de la fonction $-\psi(p) = \mathcal{L}[V_n(x)]$ nous a montré que cette fonction se comportait comme $-(n^2 + p^2)^{-\frac{1}{2}}$ au voisinage de $z = 0$ et $z = \infty$; elle a fait pressentir que ce résultat doit être vrai pour toute valeur de z , donc que

$$V_n(x) \rightarrow \mathcal{L}^{-1} - (n^2 + p^2)^{-\frac{1}{2}} = J_0(nx);$$

l'objet de ce chapitre est d'établir directement ce résultat.

Nous utiliserons d'abord pour l'étude du comportement asymptotique de $V_n(x)$, l'expression de $V_n(x)$ utilisée par Randall, analogue à (25) :

$$(27) \quad -V_n(x) = \sum_k e^{p_k x} \frac{p_k}{p_k^2 + n^2} + (-1)^n \int_0^\infty \frac{e^{-p x} dp}{p^2 [K_n'^2(p) + \pi^2 I_n'^2(p)]}.$$

3.2. COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DU TERME INTÉGRAL DE L'EXPRESSION DE RANDALL.

Soit $p = \frac{n}{\sinh \gamma}$. Pour $R(p) > 0$, les développements asymptotiques respectifs de $I_n'(p)$ et $K_n'(p)$, lorsque $n \rightarrow \infty$, peuvent s'écrire [21] :

$$\begin{cases} I_n'(p) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi p}} (n^2 + p^2)^{\frac{1}{4}} e^{n(\coth \gamma - \gamma)} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{V_l(\text{th } \gamma)}{n^l}, \\ K_n'(p) \sim -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{(n^2 + p^2)^{\frac{1}{4}}}{p} e^{-n(\coth \gamma - \gamma)} \sum_{l=0}^{\infty} (-)^l \frac{V_l(\text{th } \gamma)}{n^l}, \end{cases}$$

où $V_l(u)$ désigne un polynôme en u d'ordre $3l$. Comme $V_0(u) \equiv 1$,

$$K_n'^2(p) + \pi^2 I_n'^2(p) \sim \frac{\pi}{p^2} \sqrt{n^2 + p^2} \text{ch}[2n(\coth \gamma - \gamma)],$$

$(\coth \gamma - \gamma)$ étant une fonction croissante de $-\infty$ à $+\infty$ lorsque p croît de zéro à l'infini, désignons respectivement par p_0, p_1, p_2 les valeurs de p pour lesquelles $(\coth \gamma - \gamma)$ prend pour valeurs : $0; -\frac{1}{\sqrt{n}}; \frac{1}{\sqrt{n}}$. Il est facile de voir que, pour n assez grand, on peut trouver un nombre A positif tel que

$$\begin{cases} p_1 > p_0 - \frac{A}{2} n^{-\frac{3}{2}}, \\ p_2 < p_0 + \frac{A}{2} n^{-\frac{3}{2}}. \end{cases}$$

Dans ces conditions, γ_1 et γ_2 étant les valeurs homologues de p_1 et p_2 ,

$$\operatorname{ch}[2n(\coth \gamma_i - \gamma_i)] > \frac{1}{2} e^{2\sqrt{n}} \quad \text{pour } i = 1, 2,$$

et l'on peut écrire

$$\begin{aligned} (28) \quad \frac{\pi}{2} \int_0^\infty \frac{e^{-px}}{p^2 [K_n'^2(p) + \pi^2 I_n'^2(p)]} dp &\sim \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{e^{-px}}{\sqrt{n^2 + p^2} \operatorname{ch}[2n(\coth \gamma - \gamma)]} dp \\ &< e^{-2\sqrt{n}} \int_0^{p_0} \frac{e^{-px}}{\sqrt{n^2 + p^2}} dp + \int_{p_0 - An^{-\frac{3}{2}}}^{p_0 + An^{\frac{3}{2}}} \frac{e^{-px}}{\sqrt{n^2 + p^2}} dp + e^{-2\sqrt{n}} \int_{p_0}^\infty \frac{e^{-px}}{\sqrt{n^2 + p^2}} dp \\ &< \frac{e^{-2\sqrt{n}}}{n} \left| \frac{e^{p_0 x} - 1}{x} \right| + A e^{-p_0 x} n^{-\frac{5}{2}} + \frac{e^{-2\sqrt{n}}}{n} e^{-p_0 x} < 2A \frac{e^{-p_0 x}}{n^{\frac{5}{2}}}, \end{aligned}$$

la dernière inégalité étant assurée, pour n assez grand, quel que soit x positif ou nul.

Le terme intégral de (27) converge donc vers zéro, quel que soit x . Il ne peut en être de même de l'autre terme que nous désignerons par $U_n(x)$, puisque $V_n(0) = 1$.

Examinons maintenant le comportement asymptotique de ce terme.

3.3. COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DE $U_n(x)$.

Soit donc

$$(29) \quad U_n(x) = \sum_k e^{p_k x} \frac{p_k}{p_k^2 + n^2},$$

où les p_k désignent les zéros de $K_n'(p)$, tous situés dans $(\mathcal{O})$.

Nous avons montré, ci-dessus, que le terme intégral, soit $T_n(x)$, converge uniformément vers zéro. Numériquement, on vérifie déjà que, tant que x reste inférieur à 15, $U_n(x)$ donne une approximation acceptable de $-V_n(x)$ pour $n = 9, 10$. On peut noter qu'une telle approximation, par une combinaison linéaire d'exponentielles [au nombre, nous le verrons, de n ou $(n + 1)$], est analogue à la première approximation systématique de Luke [15]; mais celui-ci donne, en fait, un moyen d'obtenir des séries ayant en général plus de n termes exponentiels, constituant alors des approximations meilleures.

L'évaluation de $U_n(x)$ nécessitant la connaissance de la distribution dans le plan complexe des racines de $K_n'(p)$ lorsque $n \rightarrow \infty$, nous nous appuyerons sur la théorie faite par Olver à ce sujet.

3.4. RAPPEL DES RÉSULTATS D'OLVER SUR LES ZÉROS DES FONCTIONS DE HANKEL.

Pour nous ramener aux fonctions de Hankel, nous ferons le changement de variable :

$$(30) \quad p = jn\sigma;$$

on peut alors écrire

$$K_n(p) = j^{\frac{\pi}{2}} e^{jn\frac{\pi}{2}} H_n^{(1)}(n\sigma e^{j\pi}),$$

et

$$K'_n(p) = -jn^{\frac{\pi}{2}} e^{jn\frac{\pi}{2}} H_n^{(1)}(n\sigma e^{j\pi}).$$

Si l'on se limite au premier terme asymptotique, le développement asymptotique de $H_n^{(1)'}(n\sigma e^{j\pi})$ se déduit de celui de $H_n^{(1)}(n\sigma e^{j\pi})$ par multiplication par $\sigma e^{j\pi}$. On a précisément d'après Olver [21], pour $|\arg \sigma| < \pi$:

$$(31) \quad H_n^{(1)'}(n\sigma e^{j\pi}) \sim (-)^{n+1} \frac{2j}{\sigma} \left(\frac{4\zeta}{1-\sigma^2} \right)^{-\frac{1}{4}} \frac{D_{11}\left(n^{\frac{2}{3}}\zeta\right)}{n^{\frac{2}{3}}} \left(1 + O\left(n^{-\frac{2}{3}}\right) \right),$$

expression dans laquelle ζ est défini par les deux relations suivantes :

$$(32) \quad \frac{2}{3}\zeta^{\frac{3}{2}} = y - \operatorname{th} y,$$

$$(33) \quad \sigma = \frac{1}{\operatorname{ch} y}.$$

N. B. — y et γ sont reliés simplement.

La forme asymptotique (32) provient de ce que $H_n^{(1)}(n\sigma e^{j\pi})$ est solution de l'équation différentielle en ζ :

$$(34) \quad W''(\zeta) = [n^2\zeta + g(\zeta)] W(\zeta),$$

$g(\zeta)$ désignant une fonction régulière autour des racines.

Les zéros de (34) tendent asymptotiquement vers les zéros de l'équation d'Airy, qui est de la forme (34) où la fonction $g(\zeta)$ serait identiquement nulle.

Ces zéros sont les zéros de $D_{11}\left(n^{\frac{2}{3}}\zeta\right)$ ou de $A_i\left[n e^{-j\pi} n^{\frac{2}{3}}\zeta\right]$: c'est ce qu'indique la forme (32) de $H_n^{(1)'}(n\sigma e^{j\pi})$.

3.5. CONSÉQUENCES SUR LA RÉPARTITION DES ZÉROS.

Désignons par a_s ($s = 1, 2, \dots$) les zéros de la fonction d'Airy $A_i(u)$. Ils sont tous réels et vérifient pour s de l'ordre de n :

$$a_s = -\left(\frac{3\pi s}{2}\right)^{\frac{2}{3}} + O(n^{-1}).$$

Il leur correspond :

$$\zeta_s = \left(\frac{3\pi s}{2n} e^{-j\pi}\right)^{\frac{2}{3}} + O\left(n^{-\frac{5}{3}}\right),$$

et, d'après (32), toujours si s est de l'ordre de n :

$$(35) \quad y_s - \operatorname{th} y_s = -j \frac{\pi s}{n} + O(n^{-2}).$$

Les racines σ correspondantes sont situées dans le demi-plan $\Re \sigma > 0$; elles sont symétriquement disposées par rapport à l'axe imaginaire. [Il n'y a pas de racines sur cet axe lorsque n est entier, mais seulement si $(n + \frac{1}{2})$ est impair].

Le nombre de racines à partie réelle positive est égal à $\frac{n}{2}$ si ce nombre est entier, $\frac{n+1}{2}$ autrement.

Introduisons une variable continue t , telle que

$$(36) \quad \frac{s}{n'} = t + \frac{1}{2},$$

n' désignant le nombre de racines [$n' - n \leq 1$]. Les racines de $H_n^{(1)'}(n\sigma e^{j\pi})$ tendent asymptotiquement vers l'arc (c) défini paramétriquement par (33) et

$$(37) \quad y - \operatorname{th} y = -j\pi \left(t + \frac{1}{2} \right).$$

N. B. — Si n est semi-entier, soit $n = N + \frac{1}{2}$, où N est entier, il y a exactement N racines, et l'on peut remplacer n par N dans le second membre de (31) sans autre modification. On peut remarquer que dans ce cas, $V_n(x) = U_n(x)$.

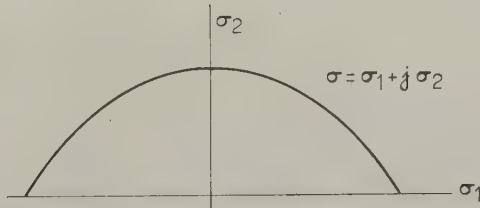


Fig. 3.

Le terme intégrale $T_n(x)$ est, en effet, absent, puisqu'on peut prendre comme domaine (ω) d'uniformité, le domaine (ω) de la figure 2, mais non entaillé suivant l'axe réel négatif, puisque la fonction $K_{N+\frac{1}{2}}(p) [p K'_{N+\frac{1}{2}}(p)]^{-1}$ est maintenant méromorphe à distance finie. Si l'on avait admis que $V_N(x)$ converge vers $V_{N+\frac{1}{2}}(x)$, il n'aurait pas été nécessaire de montrer que $T_n(x)$ converge uniformément vers zéro.

L'arc (c) (fig. 3), est un arc simple situé dans le demi-plan supérieur de σ .

Il est symétrique par rapport à l'axe imaginaire qu'il coupe en un point d'ordonnée σ tel que

$$\sqrt{1+\sigma^2} = \sigma \operatorname{ch} \sqrt{1+\sigma^2}, \quad \text{d'où } \sigma = 0,6625.$$

Il passe par les points $\sigma = \pm 1$ correspondant respectivement aux valeurs $\mp \frac{1}{2}$ du paramètre t . D'après (37) :

$$(38) \quad dt = -\frac{j}{\pi} \frac{\sqrt{1-\sigma^2}}{\sigma} d\sigma.$$

C'est cette relation différentielle qui va nous donner [23] le comportement asymptotique de $U_n(x)$.

Posons

$$X = nx; \quad j e^{jn\sigma_k x} \frac{\sigma_k}{1-\sigma_k^2} = f(t_k, X); \quad h = \Delta(t_k) = \frac{1}{n}.$$

La somme $U_n(x)$ définie par (30) s'écrit alors

$$U_n(x) = h \sum_{k=1}^{n'} f(t_k, X).$$

Évaluons-la par la méthode d'Euler :

$$(39) \quad h \sum_{k=1}^{n'} f(t_k, x) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t) dt + \frac{h}{2} [f(t_1, X) + f(t_{n'}, X)] \\ + \sum_{k=1}^{n'-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left(t - \frac{t_k + t_{k+1}}{2} \right) f_t(t, X) dt.$$

Pour X positif borné et n' grand, on peut montrer en utilisant (38) que le second terme du second membre est d'ordre $-\frac{1}{3}$ en n' . Quant aux termes suivants, on peut également établir que leur somme est au plus d'ordre $-\frac{1}{3}$ en n' , en s'adressant au théorème de la moyenne de Weierstrass. Il reste alors comme terme principal de $U_n(x)$ quand $n' \rightarrow \infty$:

$$U_n(x) \sim \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t) dt,$$

Soit, en vertu de (38) :

$$U_n(x) \sim -\frac{1}{\pi} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{jX} \frac{\sigma}{1-\sigma^2} \frac{\sqrt{1-\sigma^2}}{\sigma} d\sigma = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} e^{jX} \frac{d\sigma}{\sqrt{1-\sigma^2}} = -J_0(X).$$

Ainsi, pour X borné, lorsque $n' \rightarrow \infty$:

$$V_n(x) \rightarrow U_n(x) \rightarrow -J_0(nx).$$

N. B. — L'erreur commise en remplaçant σ_k par son expression tirée de (34) et (38) est au plus de l'ordre de -1 , en x' , si X est borné. Il reste maintenant à examiner le cas où x n'est plus borné. On peut montrer que $V_n(x)$, ou $U_n(x)$, reste borné par une fonction tendant vers zéro quand $x \rightarrow \infty$ aussi grand que soit n' .

Il est commode, pour cela, de majorer les termes $e^{i\sigma_k X}$ relatifs aux n'' points σ_k à droite de l'axe imaginaire par $e^{-2X} \left(\frac{k}{n'}\right)^{\frac{2}{3}}$. On vérifie, en effet, que pour $\frac{k}{n'} < \frac{1}{2}$, n' étant assez grand :

$$3\sigma_k < 2\left(\frac{k}{n'}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

D'autre part,

$$\frac{\sigma_k}{1 - \sigma_k^3} < \left(\frac{n'}{k}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

On établit alors aisément, à partir de ces majorations, pour X et n' assez grands, et en posant

$$\alpha_k = \left(\frac{k}{n'}\right)^{\frac{2}{3}} \quad \text{et} \quad dk = \frac{3}{2} n' \sqrt{\alpha} d\alpha,$$

que l'on a

$$|V_n(x)| < 3 \int_0^\infty \frac{e^{-2X\alpha}}{\sqrt{\alpha}} d\alpha = 3 \sqrt{\frac{\pi}{2X}}.$$

Donc, $V_n(x)$ converge uniformément vers $J_0(X)$, quel que soit x , quand $n' \rightarrow \infty$. Il en résulte, si $\mathcal{R}(p) > 0$:

$$(40) \quad -\mathcal{L}^2 V_n(x) \rightarrow \mathcal{L}^2 J_0(nx) \doteq \frac{1}{\sqrt{x^2 + p^2}}$$

et cette remarque permettra de déterminer le comportement asymptotique du noyau instationnaire.

Notons, auparavant, que nous avons seulement montré, en stationnaire, que $V_n(x)$ tendait vers $-J_0(nx)$, avec une erreur relative tendant vers zéro tant que $X = nx$ restait borné, et que pour $X \rightarrow 0$, $V_n(x)$ tendait vers zéro, mais d'une façon éventuellement toute différente de $J_0(nx)$.

3.6. COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DU NOYAU INSTATIONNAIRE.

Comme conséquence immédiate de (40), en remplaçant p^2 par q^2 , il vient, pour $n \rightarrow \infty$:

$$(41) \quad \mathcal{L}^2 W_n(x) \sim - \left\{ x^2 + \beta^2 \left[\left(p + j \frac{k M^2}{\beta^2} \right)^2 + \left(\frac{k M}{\beta^2} \right)^2 \right] \right\}^{-\frac{1}{2}},$$

et, par conséquent :

$$(42) \quad W_n(x) \sim -\frac{e^{i \frac{k M^2}{\beta^2} x}}{\beta} J_0 \left(x_0 \sqrt{\frac{n^2}{\beta^2} + \frac{k^2 M^2}{\beta^2}} \right).$$

3.7. CAS DU CYLINDRE DÉVELOPPÉ.

Les résultats (41) et (42) se retrouvent dans le problème du panneau plan et sont connus depuis Miles. Comme nous l'avons vu, celui-ci a même proposé la relation (41) comme approximation de $x W_n(x)$ quel que soit $x \neq 0$ et pour p assez grand (relatif aux courtes longueurs d'onde).

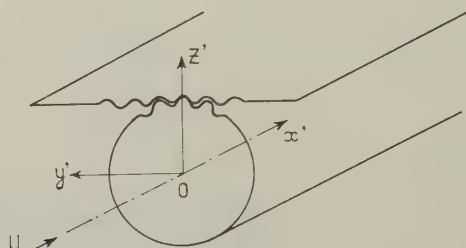


Fig. 4.

On retrouve, en effet, le résultat (42) et par conséquent (41) en traitant le problème du panneau que l'on définit en développant le cylindre suivant un demi-plan tangent dont le bord définit le bord d'attaque situé dans la section amont, la déformation locale du cylindre au voisinage du plan étant périodiquement reproduite indéfiniment de part et d'autre de la génératrice de contact (fig. 4).

Soit alors

$$\alpha = \alpha_n(x) \cos n y e^{j \omega t}$$

l'expression de l'angle d'attaque sur le panneau, angle d'attaque correspondant sur le cylindre à

$$\alpha = \alpha_n(x) \cos n \theta e^{j \omega t}.$$

Le potentiel φ correspondant est alors de la forme

$$\varphi_1(x, y, z, t) = f_n(x, z) \cos n y e^{j \omega t}.$$

Or, l'équation du potentiel en coordonnées cartésiennes est

$$(43) \quad -\beta^2 \varphi_{1xx} + \varphi_{1yy} + \varphi_{1zz} - 2 \frac{M}{c} \varphi_{1xt} - \frac{1}{c^2} \varphi_{1tt} = 0.$$

Donc, f_n satisfait à l'équation

$$(44) \quad -\beta^2 f_{xx} + f_{zz} - 2 j k M^2 f_x + (k^2 M^2 - n^2) f = 0,$$

et la condition de non-décollement s'écrit

$$\varphi_z = f_{nz} \cos n\gamma e^{j\omega t} = \alpha_n(x) \cos n\theta e^{j\omega t},$$

d'où

$$f_{nz} = \alpha_n(x).$$

En écrivant $f_n(x, z)$ sous la forme

$$f_n(x, z) = e^{-j \frac{k M^2}{\beta^2} x} \psi(x, z),$$

$\psi(x, z)$ satisfait à une équation du type de Poisson :

$$(45) \quad -\beta^2 \psi_{xx} + \psi_{zz} - \left(\frac{k^2 M^2}{\beta^2} + n^2 \right) \psi = 0,$$

où ψ_z est donné. C'est un problème d'Helmholtz dont la solution tendant vers zéro pour $|z| \rightarrow \infty$, s'écrit pour $z = 1$:

$$\psi(x, 1) = \int_0^x N(x - \xi) \psi_z(\xi, 1) d\xi,$$

où

$$N(x) = -\frac{1}{\beta} J_0 \left(x \sqrt{\frac{k^2 M^2}{\beta^4} + \frac{n^2}{\beta^2}} \right),$$

et finalement :

$$(46) \quad \varphi(x, 1) = -\frac{1}{\beta} \int_0^x e^{-j \frac{k M^2}{\beta^2} (x - \xi)} J_0 \left[(x - \xi) \sqrt{\frac{n^2}{\beta^2} + \frac{k^2 M^2}{\beta^4}} \right] \alpha_n(\xi) d\xi.$$

On retrouve bien la formule (42).

On remarque qu'en faisant le changement de variables : $\frac{z}{r}$; $\frac{\gamma}{\theta}$, l'équation (43) est identique à l'équation (1') où l'on aurait négligé le terme $\frac{1}{r'} \varphi_{1r'}$ et remplacé $\frac{1}{r'^2} \varphi_{1\theta\theta}$ par $\varphi_{1\gamma\gamma}$. Le terme $\frac{1}{r'} \varphi_{1r'}$ est lié à la courbure des courbes coordonnées $[x', r', \theta]$; l'effet de courbure de la surface de la coque doit donc s'amenuiser pour les grandes valeurs de n . Cela doit apparaître, *a priori*, dans l'examen du comportement asymptotique des solutions (1') ou de (5), lorsque $n \rightarrow \infty$.

Solutions asymptotiques, pour $n \rightarrow \infty$, de l'équation du potentiel. — Considérons une solution quelconque $f_n(x, r)$ de l'équation (5), et soit

$$f_n(x, r) = e^{-j \frac{k M^2}{\beta^2} x} \psi(x, r),$$

$\psi(x, r)$ satisfait à

$$(47) \quad \psi_{rr} - \beta^2 \psi_{xx} + \frac{\psi_r}{r} - \left(\frac{k^2 M^2}{\beta^2} + \frac{n^2}{r^2} \right) \psi = 0.$$

Faisons alors le changement de variables :

$$X = nx; \quad Y = n(r-1).$$

Posons en outre :

$$\frac{k^2 M^2}{\beta^2} = a^2 n^2 \quad \text{et} \quad \Psi(X, Y) = \psi(x, r).$$

En remplaçant $\frac{1}{r^2}$ par $1 - \frac{Y}{n} \left(2 + \frac{Y}{n}\right) \left(1 + \frac{Y}{n}\right)^{-2}$, on voit que $\Psi(X, Y)$ satisfait à

$$(48) \quad \Psi_{XY} - \beta^2 \Psi_{XX} - (a^2 + 1)\Psi + \frac{1}{n} \left[\frac{\Psi_Y}{1 + \frac{Y}{n}} + Y \frac{2 + \frac{Y}{n}}{\left(1 + \frac{Y}{n}\right)^2} \Psi \right] = 0.$$

Les conditions aux limites sont les suivantes :

$$(49) \quad \begin{cases} \Psi_Y(X, 0) = \text{fonction donnée de } X, \\ \Psi(X, Y) = 0 \quad \text{pour } X = \beta Y. \end{cases}$$

Les données concernent, d'une part, une caractéristique de l'opérateur du second ordre entrant dans l'équation (48), d'autre part, une courbe (l'axe X) ayant une orientation de temps.

Pour $Y \ll n$, les termes en $\frac{1}{n}$ de (48) sont respectivement voisins de $\frac{1}{n} \Psi_Y$ et $2 \frac{Y}{n} \Psi$. Estimons séparément leurs effets.

Pour le premier, on peut [25] le considérer comme un terme de diffusion et d'atténuation exponentielle agissant sur la solution $\Psi_1(X, Y)$ satisfaisant aux conditions (49) et à l'équation

$$(50) \quad \Psi_{1YY} - \beta^2 \Psi_{1XX} - (a^2 + 1)\Psi_1 = 0$$

qui n'est pas autre chose que la solution du problème du cylindre développé que l'on a trouvé en (45).

Pour le second terme $2 \frac{Y}{n} \Psi$, on voit immédiatement que lorsque Y est de l'ordre de n, ou supérieur, que la solution $\Psi_1(X, Y)$ précédente n'est plus approchée. La méthode des caractéristiques appliquée à l'équation

$$(51) \quad \Psi_{YY} - \beta^2 \Psi_{XX} - \left(a^2 + 1 - 2 \frac{Y}{n}\right) \Psi = 0$$

permet de voir que, par influence, si β est de l'ordre de 1, la solution Ψ_1 cesse d'être approchée lorsque X devient de l'ordre de n, mais demeure valable si X reste borné ainsi que Y. Pour mieux apprécier l'effet du terme $2 \frac{Y}{n} \Psi$ de (51) dans un domaine (X, Y) plus étendu, et, par exemple, pour $Y = O(n^\alpha)$, où $0 < \alpha < 1$, on considérera la solution Ψ_2 satisfaisant à l'équation (51) et aux conditions (49).

N. B. — Pour $Y \gg n$, le terme $\frac{Y}{n} \left(2 + \frac{Y}{n}\right) \left(1 + \frac{Y}{n}\right)^{-2} \Psi$ tend vers Ψ , et l'équation (47) linéarisée, sans le terme Ψ_Y , est encore de la forme (49).

Introduisons la T. L. :

$$\tilde{\Psi}_2(p, Y) = \int_0^\infty e^{-pX} \Psi_2(X, Y) dX.$$

Elle satisfait à l'équation

$$(52) \quad \left[\frac{d^2}{dY^2} + \left(2 \frac{Y}{n} - (a^2 + 1) - \beta^2 p^2 \right) \right] \tilde{\Psi}_2(p, Y) = 0$$

ou, en posant

$$Z = \left(\frac{2}{n} \right)^{\frac{1}{3}} \left[Y - \frac{n}{2} (a^2 + 1 + \beta^2 p^2) \right],$$

$$(52') \quad \left(\frac{d^2}{dZ^2} + Z \right) \tilde{\Psi}_2(p, Z) = 0,$$

en désignant par $\tilde{\Psi}_2(p, Z)$ la fonction égale à $\Psi_2(p, Y)$.

Envisageons la solution $\sqrt{Z} H_{\frac{1}{3}}^{(1)} \left(\frac{2}{3} Z^{\frac{3}{2}} \right)$ de cette équation.

En considérant son développement asymptotique, lorsque p est réel, il est facile de vérifier que, pour n grand, elle tend à être proportionnelle à $\exp(-Y \sqrt{a^2 + 1 + \beta^2 p^2})$, or c'est bien vers une telle fonction de Y que tend $\tilde{\Psi}_1(p, Y)$; $\tilde{\Psi}_2(p, Y)$ doit donc être proportionnelle à cette fonction de Z et l'on en déduit

$$(53) \quad \tilde{\Psi}_2(p, Y) = -j \frac{\tilde{\Psi}_2(p, 0) \sqrt{1 - \frac{2Y}{nb}} H_{\frac{1}{3}}^{(1)} \left[\frac{2}{3} \left(\frac{2}{n} \right)^{\frac{1}{2}} \left(Y + \frac{n}{2} e j \pi \right)^{\frac{3}{2}} \right]}{H_{\frac{1}{3}}^{(1)} \left[\frac{n}{3} (b e j \pi)^{\frac{3}{2}} \right] + \frac{1}{n} [b e j \pi]^{\frac{1}{2}} H_{\frac{1}{3}}^{(1)} \left[\frac{n}{3} (b e j \pi)^{\frac{3}{2}} \right]}$$

où

$$b = a^2 + 1 + \beta^2 p^2.$$

On voit dans cette expression que la T. L. du noyau exprimant $\Psi_2(X, 0)$ à partir de $\Psi_{2Y}(X, 0)$ diffère de $(a^2 + 1 + \beta^2 p^2)^{-\frac{1}{2}}$, transformée du noyau correspondant de $\Psi_1(X, 0)$, par une expression tendant bien asymptotiquement vers 1, lorsque $n \rightarrow \infty$, sauf pour $a^2 + 1 + \beta^2 p^2 \rightarrow 0$.

On peut, à partir de là juger l'erreur commise avec l'approximation $\Psi_1(X, 0)$, du moins dans le domaine $X = o(n^\alpha)$ où $0 < \alpha < 1$. L'erreur relative sur $\Psi_2(X, 0)$, pour X borné, tend vers zéro lorsque $n \rightarrow \infty$.

En définitive, par le choix des nouvelles variables X et Y , on peut donc aussi montrer, et par une discussion au niveau de l'équation aux dérivées partielles (48), que, lorsque $n \rightarrow \infty$, X et Y étant bornés, la solution du cylindre développé, correspondant ici à la solution Ψ_1 , est bien une solution asymptotique lorsque $n \rightarrow \infty$.

4. Recherche d'une approximation du noyau stationnaire valable quel que soit n .

4.1. APPROXIMATION DU NOYAU COMME FONCTION DE LA DISTANCE AXIALE.

Changeons la définition de la fonction de Randall $V_n(x)$ en convenant que $V_n(X)$ représente maintenant la même grandeur, mais fonction de $X = nx$ (sauf si $n = 0$). Si l'on trace $V_n(X)$, on constate que les zéros successifs $X_{n,j}$ de $V_n(X)$ sont très sensiblement équidistants pour un n donné. Si l'on représente les $X_{n,j}$ en fonction de l'ordre j , on définit

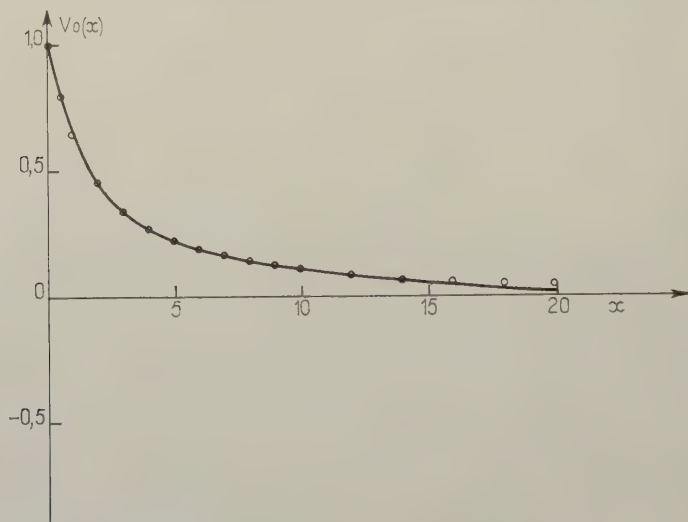


Fig. 5. — Approximation exponentielle du noyau du potentiel ($n = 0$).

— Approximation;
○ Théorie exacte de Randall.

$$V_0(x) = 0,6 e^{-0,75 X} + 0,4 e^{-0,132 X}.$$

alors des points alignés sur des droites, dont les pentes varient assez lentement avec n ; les $X_{n,j}$ varient aussi assez lentement. Soit alors

$$v_n(X_{n,j+1} - X_{n,j}) = \pi \quad \text{et} \quad v_n X_{n,1} = \frac{\pi}{2} + \Phi_n,$$

on peut alors écrire approximativement $V_n(X)$ sous la forme

$$(54) \quad V_n(X) = F_n(X) \cos(V_n X - \Phi_n)$$

On peut espérer représenter $F_n(X)$ par une courbe passant par le point $I\left(X = 0; F_n = \frac{1}{\cos \Phi_n}\right)$, la fonction correspondante ayant des dérivées première et seconde de signe constant, qui soit une enveloppe de la

courbe $Y(X) = |V_n(X)|$. Dans un lissage manuel, le dessinateur est suffisamment guidé par cette triple condition imposée à la courbe $F_n(X)$: passer par le point I; décroissance monotone, et contact avec la courbe $Y(X)$, pour en faire un tracé bien défini. On essaye alors de repré-

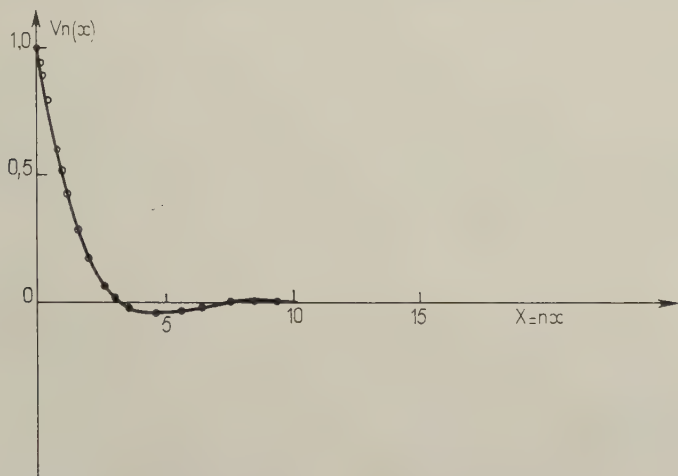


Fig. 6. — Approximation exponentielle du noyau du potentiel ($n = 1$).

— Approximation;

○ Théorie exacte de Randall.

$$V_1(x) = (0,8 e^{-0,520 X} + 0,20 e^{-1,28 X}) \cos 0,5 X.$$

senter au mieux la courbe ainsi obtenue pour un x donné par la combinaison linéaire de deux exponentielles décroissantes; autrement dit, on cherche à représenter $F(X)$ par

$$(55) \quad F(X) = A_1 e^{-\lambda_1 X} + A_2 e^{-\lambda_2 X}.$$

4.2. TABLEAU DES EXPRESSIONS APPROCHÉES DU $V_n(X)$.

$V_0(x) \dots\dots$	$0,6 \quad e^{-0,75 x} + 0,4 e^{-0,132 x}$
$V_1(X) \dots\dots$	$(0,8 \quad e^{-0,52 X} + 0,2 \quad e^{-1,28 X}) \cos(0,5 x)$
$V_2(X) \dots\dots$	$(1,045 e^{-0,465 X}) \cos(0,714 X - 0,28)$
$V_3(X) \dots\dots$	$(0,76 \quad e^{-0,31 X} + 0,40 e^{-1,28 X}) \cos(0,851 X - 0,52)$
$V_4(X) \dots\dots$	$(0,72 \quad e^{-0,257 X} + 0,44 e^{-1,28 X}) \cos(0,861 X - 0,535)$
$V_5(X) \dots\dots$	$(0,70 \quad e^{-0,237 X} + 0,46 e^{-1,28 X}) \cos(0,870 X - 0,550)$
$V_6(X) \dots\dots$	$(0,68 \quad e^{-0,217 X} + 0,50 e^{-1,28 X}) \cos(0,880 X - 0,565)$
$V_7(X) \dots\dots$	$(0,66 \quad e^{-0,200 X} + 0,53 e^{-1,28 X}) \cos(0,893 X - 0,580)$
$V_8(X) \dots\dots$	$(0,64 \quad e^{-0,178 X} + 0,57 e^{-1,28 X}) \cos(0,899 X - 0,595)$
$V_9(X) \dots\dots$	$(0,63 \quad e^{-0,168 X} + 0,59 e^{-1,28 X}) \cos(0,906 X - 0,610)$
$V_{10}(X) \dots\dots$	$(0,62 \quad e^{-0,162 X} + 0,61 e^{-1,28 X}) \cos(0,915 X - 0,625)$

La méthode employée fournit une optimisation de nature empirique avec seulement deux termes exponentiels. La raison pour laquelle on s'est limité à deux termes exponentiels est qu'alors coefficients et exposants sont significatifs au point qu'on peut, comme nous allons voir, les représenter de façon approchée, ou les lisser, par des fonctions simples de n lentement variables.

Si l'on cherchait une représentation encore plus raffinée en introduisant plus de deux termes exponentiels, on peut craindre que les nouveaux coefficients et exposants cessent d'être aussi significatifs, partant de toute façon d'un lissage manuel, et que par conséquent le lissage précédent des coefficients et exposants ne devienne très problématique et ne rende en définitive illusoire le bénéfice de ce raffinement.

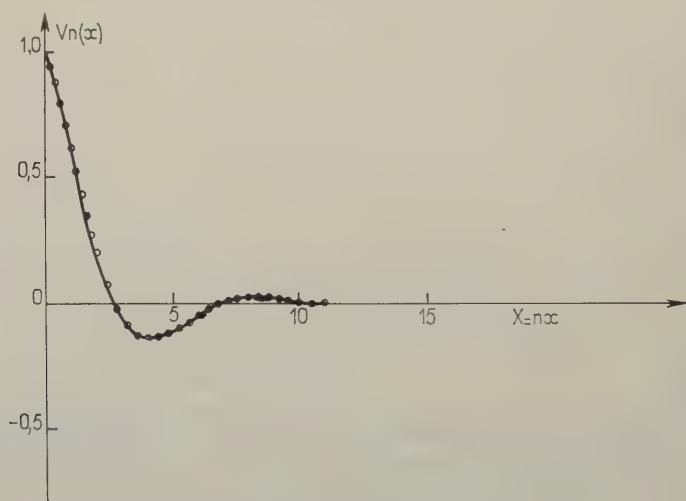


Fig. 7. — Approximation exponentielle du noyau du potentiel ($n = 2$).

— Approximation;
○ Théorie exacte de Randall.

$$V_2(x) = 1,045 e^{-0,465 X} \cos(0,714 X - 0,28).$$

Or, en reportant sur papier semi-logarithmique $F_n(X)$ en fonction de X , la courbe représentative obtenue ressemble à un compas : elle a deux branches rectilignes respectivement situées dans les zones $X \ll 1$ et $X \gg 1$. Cette remarque permet de déterminer facilement les paramètres figurant dans l'expression (55). On obtient, en effet, une courbe de ce type, d'équation (55), si $\lambda_1 \ll \lambda_2 = O(1)$, A_1 et A_2 ayant des ordres de grandeur analogues.

Ainsi pour $X > 1$, on doit avoir sensiblement

$$F \simeq A_1 e^{-\lambda_1 X} \quad \text{ou} \quad \log_{10} F = -(\log_{10} e) \lambda_1 X + \log_{10} A_1,$$

dont la représentation correspond à la bande rectiligne la plus à droite. On en tire λ_1 et A_1 et par conséquent :

$$A_2 = \frac{1}{\cos \Phi_n} - A_1.$$

Pour $X \ll 1$, on a sensiblement

$$F \simeq A_1 + A_2 e^{-\lambda_2 X} \quad \text{ou} \quad \log_{10} (F - A_1) = -(\log_{10} e) \lambda_2 X + \log_{10} A_2,$$

dont la représentation correspond à l'autre branche rectiligne. On en tire λ_2 . On a finalement tous les paramètres de la représentation approchée de $V_n(X)$:

$$(56) \quad V_n(X) = \left\{ A_{1n} e^{-\lambda_1 X} + \left(\frac{1}{\cos \Phi_n} - A_{1n} \right) e^{-\lambda_2 X} \right\} \cos(\nu_n X - \Phi_n).$$

On peut ainsi obtenir d'excellentes approximations de $V_n(X)$ pour $n = 0, 1, 2, \dots, 10$ et $X < 20$.

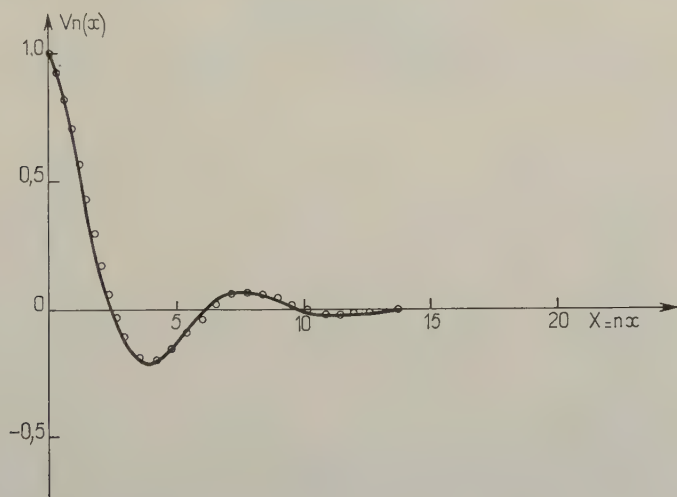


Fig. 8. — Approximation exponentielle du noyau du potentiel ($n = 3$).

— Approximation;
○ Théorie exacte de Randall.

$$V_3(x) = (0,76 e^{-0,310 X} + 0,40 e^{-1,28 X}) \cos(0,851 X - 0,520).$$

N. B. — Lorsque $n = 0$, on supprime le facteur périodique $\cos(\nu X - \Phi)$, autrement dit $\nu_0 = \Phi_0 = 0$.

Dressons le tableau des expressions approchées des fonctions $V_n(X)$ pour les valeurs de n et de X considérées par Randall.

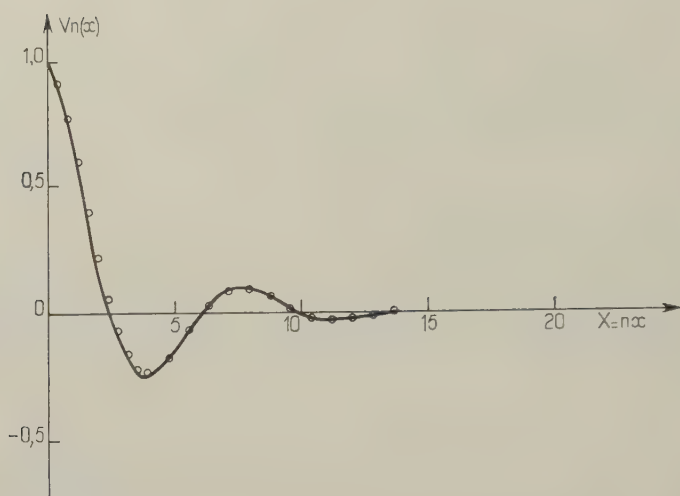


Fig. 9. — Approximation exponentielle du noyau du potentiel ($n = 4$).

— Approximation;
 ○ Théorie exacte de Randall.

$$V_4(x) = (0,72e^{-0,257X} + 0,44e^{-1,28X}) \cos(0,861X - 0,535).$$

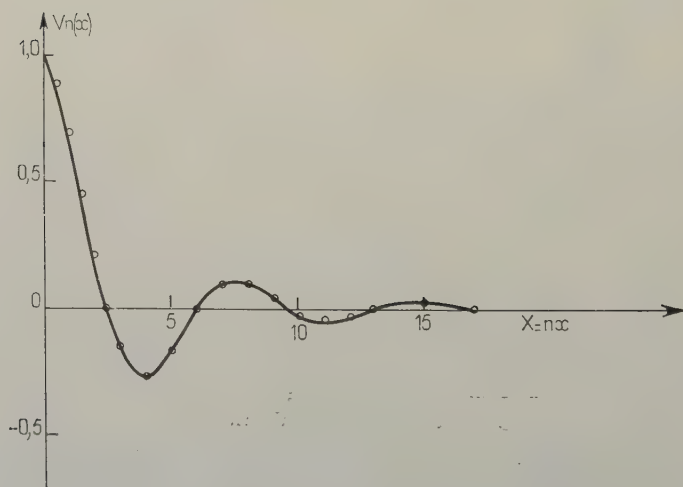
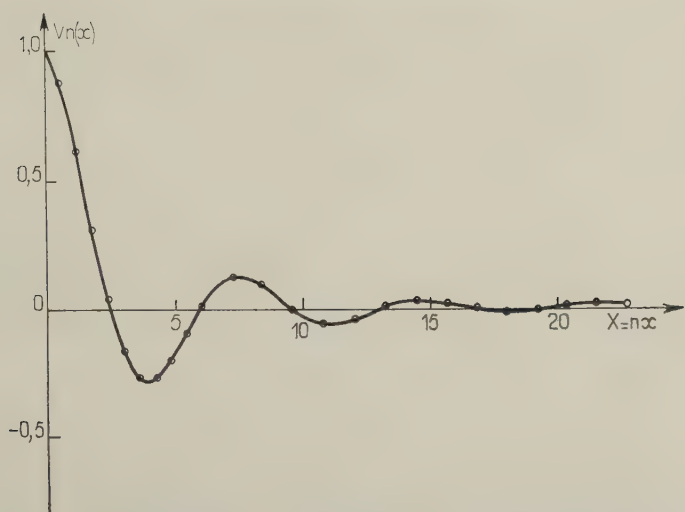


Fig. 10. — Approximation exponentielle du noyau du potentiel ($n = 5$).

— Approximation;
 ○ Théorie exacte de Randall.

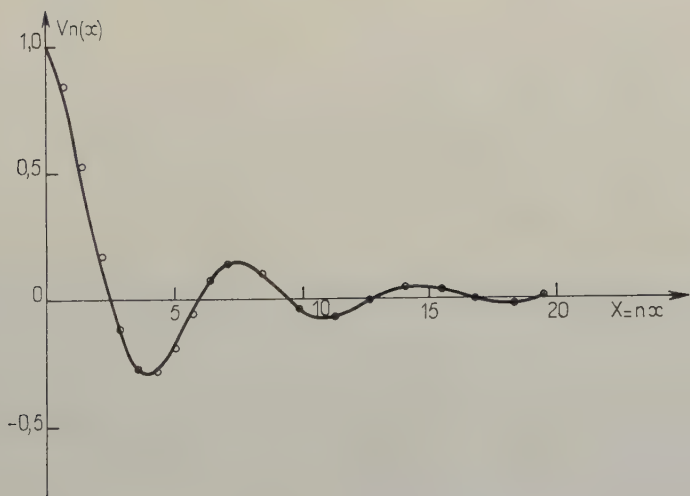
$$V_5(x) = (0,7e^{-0,237X} + 0,46e^{-1,28X}) \cos(0,870X - 0,550).$$

Fig. 11. — Approximation exponentielle du noyau du potentiel ($n = 6$).

— Approximation;

○ Théorie exacte de Randall.

$$V_6(x) = (0,68 e^{-0,217 X} + 0,50 e^{-1,28 X}) \cos(0,880 X - 0,565).$$

Fig. 12. — Approximation exponentielle du noyau du potentiel ($n = 7$).

— Approximation;

○ Théorie exacte de Randall.

$$V_7(x) = (0,66 e^{-0,2 X} + 0,53 e^{-1,28 X}) \cos(0,893 X - 0,580).$$

Les figures 5 à 15 montrent la qualité des approximations de $V_n(X)$ fournies par le tableau. Les valeurs de X pour lesquelles les tables de Randall donnent $V_n(X)$ ne dépassent guère 20, cela correspond pour le noyau $W_{n,0}\left(\frac{x'}{R}\right)$ à des valeurs de x' telles que

$$\frac{n x'}{\beta R} \approx 20.$$

Pour $X > 20$, les fonctions $V_n(X)$ sont très petites vis-à-vis de 1, aussi bien que leurs approximations. Même si besoin était, d'envisager des valeurs de x correspondant à $X > 20$, l'écart relatif qui commence

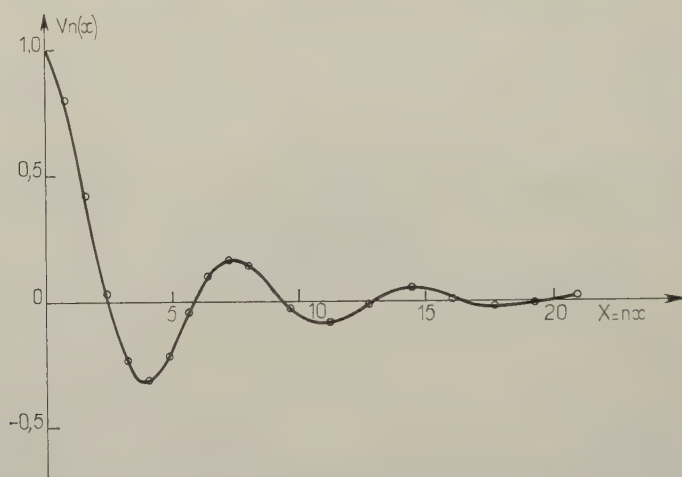


Fig. 13. — Approximation exponentielle du noyau du potentiel ($n = 8$).

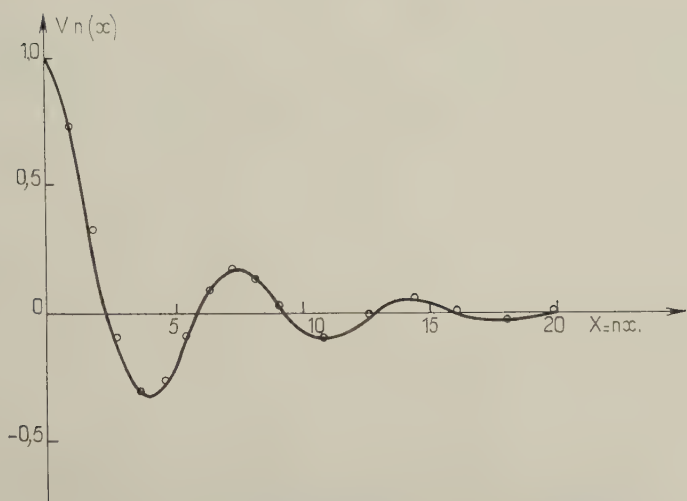
— Approximation;
○ Théorie exacte de Randall.

$$V_8(x) = (0,64e^{-0,478X} + 0,57e^{-1,28X}) \cos(0,899X - 0,595).$$

à devenir important même au voisinage des extremums, entre $V_n(X)$ et son approximation, n'a pas d'importance lorsqu'on considère $V_n(X)$ ou $W_{n,0}(x)$ comme distribution. Les fonctions arguments à envisager dans le problème du flottement sont, en effet, des fonctions bornées, et leur intégration par le noyau est peu sensible à l'imprécision de ce dernier pour les grandes valeurs de X , parce qu'il tend vers zéro.

4.3. MÉTHODE D'EXTRAPOLATION POUR $n > 10$; APPROXIMATION DE $J_0(X)$.

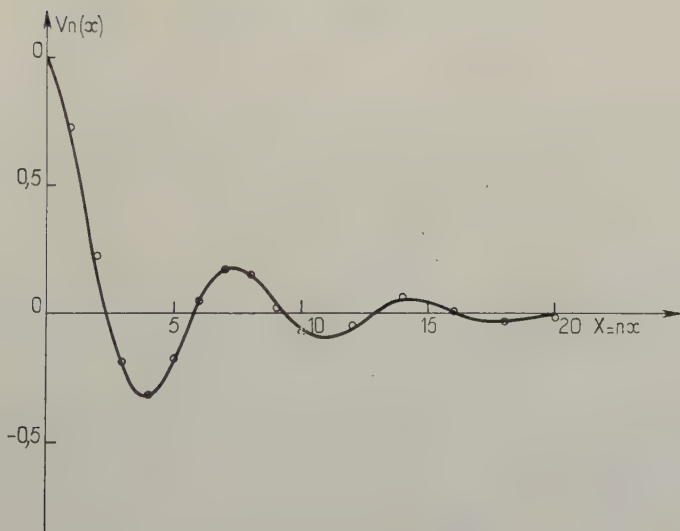
Les formules du tableau montrent une évolution très progressive, du moins pour $n \geq 3$, des divers paramètres A_{1n} , λ_{1n} , ν_n , Φ_n en fonction de n ; il est alors tentant de représenter $J_0(X)$ qui est la fonction limite

Fig. 14. — Approximation exponentielle du noyau du potentiel ($n = 9$).

— Approximation;

○ Théorie exacte de Randall.

$$V_9(x) = (0,63e^{-0,168X} + 0,59e^{-1,28X}) \cos(0,906X - 0,610).$$

Fig. 15. — Approximation exponentielle du noyau du potentiel ($n = 10$).

— Approximation;

○ Théorie exacte de Randall.

$$V_{10}(x) = (0,62e^{-0,162X} + 0,61e^{-1,28X}) \cos(0,915X - 0,625).$$

vers laquelle tend $V_n(X)$ quand $n \rightarrow \infty$, sous la forme (56). Il est alors bien évident que le comportement pour X grand sera mal représenté,

On pourrait, à ce propos, rappeler que le comportement asymptotique de $V_n(X)$ pour n fixé et grand, X augmentant indéfiniment n'est probablement pas, d'après ce qu'on a vu, celui de $J_0(X)$, mais ce n'est pas

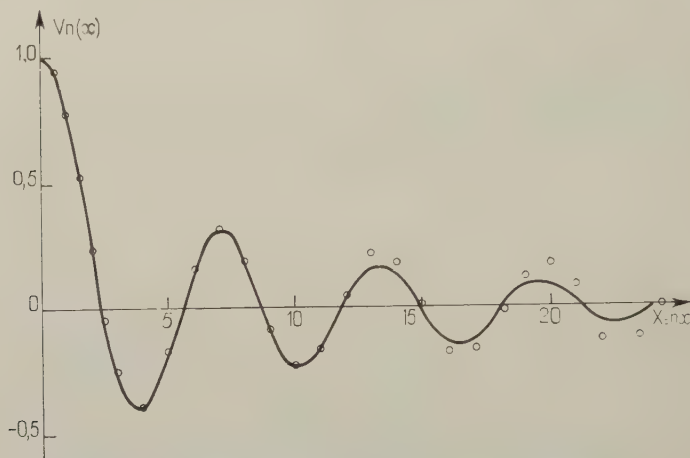


Fig. 16. — Approximation exponentielle du noyau du potentiel ($n = \infty$).

— Approximation;
○ Théorie exacte de Randall.

$$V_{\infty}(x) = J_0(x) \simeq (0,55e^{-0,0845X} + 0,930e^{-1,28X}) \cos(x - 0,830).$$

nécessaire. Nous approcherons la fonction $J_0(X)$ sous la forme (56) de manière à ce que la fonction approchée définisse bien un dirac en x , c'est-à-dire à respecter la condition analogue à (17) satisfaite par $J_0(X)$:

$$(57) \quad \int_0^{\infty} V_n(X) dX = 1,$$

l'approximation visant à être la meilleure possible pour X suffisamment borné. La technique précédente employée à $J_0(X)$ donne

$$(58) \quad J_0(X) \simeq [0,55e^{-0,0845X} + 0,93e^{-1,28X}] \cos[X - 0,83].$$

Il se trouve que, pratiquement sans aucun tâtonnement, on satisfait à la condition (57) de façon quasi exacte puisque l'on trouve avec l'approximation (58) :

$$\int_0^{\infty} V_{\infty}(X) dX = 0,999.$$

L'approximation est alors excellente jusqu'à $X = 12$, mais se détériore sensiblement au-delà (fig. 16). A ce stade, si nous portons en abscisse le nombre n , et en ordonnées l'un quelconque des paramètres A_{1n} ;

λ_{1n} ; ν_n ; Φ_n . Les points filent bien pour $3 \leq n \leq 10$, et l'on peut les joindre par une courbe simple très aplatie admettant pour asymptote la valeur du paramètre respectif correspondant à l'expression (58) de $J_0(X)$.

On peut, sans difficulté, lisser les points obtenus par des courbes d'équation :

$$(59) \quad Y = a + b e^{\alpha(10-n)}, \quad \alpha > 0,$$

alors

$$a = Y(\infty) \quad \text{et} \quad b = Y(10) - a.$$

N. B. — On peut s'étonner que la valeur λ_{2n} soit toujours égale à 1,28 aussi bien pour $n = 3$ qu'au-delà et pour $n = \infty$; en réalité, l'emploi des

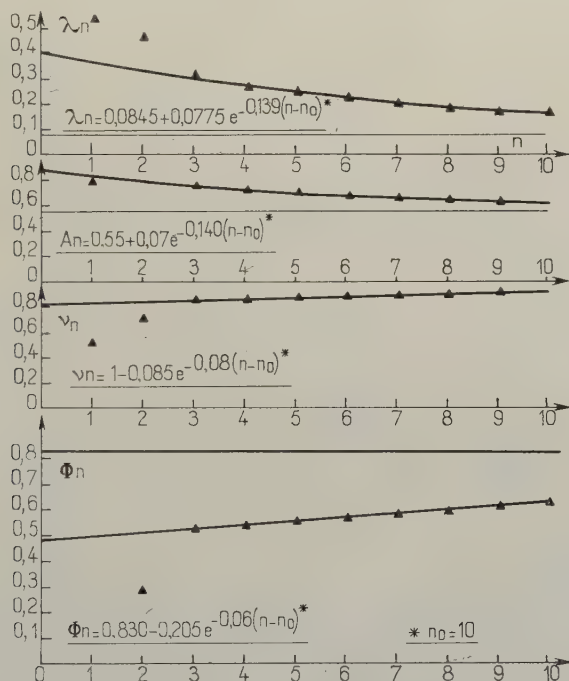


Fig. 17. — Évolution des paramètres en fonction de n .

$$V_n(x) = \left(A_n e^{-\lambda_n x} + \left(\frac{1}{\cos \Phi_n} - A_n \right) e^{-1,28 X} \right) \cos(\nu_n x - \Phi_n).$$

méthodes graphiques précédentes donnait des valeurs de ce paramètre très proches de ce nombre. On a pu maintenir sans dommage la valeur 1,28 trouvée précisément pour $J_0(X)$ pour les autres valeurs de n , sans retoucher les autres paramètres.

La figure 17 montre la qualité des lissages à partir des valeurs de paramètres indiquées dans le tableau. Les droites horizontales en trait fin représente les asymptotes : $Y = \text{Cte}$, où la valeur de la constante est celle du paramètre correspondant à l'équation (58). Comme les lissages d'interpolation entre $n = 3$ et $n = \infty$ se font par des fonctions très peu évolutives, représentées par des courbes simples très aplaties, cela signifie que déjà la valeur : $n = 10$ peut être considérée comme grande, et l'interpolation proposée au-delà de $n = 10$, est donc peu hasardeuse. Elle se résume dans la formule (56), où

$$(60) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda_{2n} = 0,0845 + 0,0775 e^{0,139(10-n)}, \\ \lambda_{1n} = 0,55 + 0,070 e^{0,140(10-n)}, \\ \nu_n = 1 - 0,085 e^{0,08(10-n)}, \\ O_n = 0,830 - 0,205 e^{0,06(10-n)}. \end{array} \right.$$

Pour tester cette approximation, on a calculé avec celle-ci l'intégrale

$$I_n = \int_0^\infty V_n(X) dX.$$

On trouve le tableau de valeurs suivantes :

n .	I_n .	n .	I_n .	n .	I_n .
3.....	0,882	7.....	0,866	20.....	0,904
4.....	0,876	8.....	0,866	30.....	0,940
5.....	0,870	9.....	0,867	40.....	0,965
6.....	0,868	10.....	0,868	∞	0,999

Au lieu d'être exactement égales à 1, les valeurs trouvées pour I_n sont quelque peu inférieures à ce nombre, en particulier pour $n < 10$; les écarts avec 1 diminuent progressivement lorsque n augmente pour devenir faibles lorsque $n = 30$ et s'annuler quasi exactement lorsque $n = \infty$.

Ces écarts par défaut, pour $n < 10$ notamment, sont dus à la fois à la décroissance exponentielle de la représentation de $V_n(X)$ et à la précision de son approximation tant que $|V_n(X)|$ reste, disons, supérieur à 0,01.

Considérons alors l'erreur commise en stationnaire sur $f_n(x)$:

$$Rf_{n_0}(x) = -\frac{1}{\beta} \int_0^x V_n \left[\frac{1}{\beta}(x - \xi) \right] w'_n(\xi) d\xi.$$

Supposons que la fonction $\frac{w'_n(\xi)}{R\beta}$ soit lentement variable et reste, ainsi que $\frac{x}{\beta} > \frac{\lambda}{\beta}$, de l'ordre de 1. Si n n'est pas grand [< 10], l'erreur relative sur $f_{n_0}(x)$ tendra à être nettement inférieure à $(1 - I_n)$ à cause de la

précision de la représentation [l'écart entre les approximations résultant de la formule (56) où les paramètres sont exprimés par (60), et les approximations numériques du tableau qui sont à l'origine du lissage est pratiquement indiscernable dans les tracés]. Si n maintenant est grand, l'erreur relative sur $f_{n_0}(x)$ tend à être du même ordre que $(1 - I_n)$, mais alors elle est encore faible car $(1 - I_n)$ devient très petit (tableau).

4.4. APPROXIMATION OBTENUE.

On a, en fait, réalisé une interpolation entre $n = 10$ et $n = \infty$, en extrapolant convenablement au-delà de $n = 10$. En alléguant la lente évolution des paramètres, on peut estimer faible l'erreur due au choix des fonctions de lissage du type (59) plutôt que telle autre; par conséquent, le lissage de $V_n(X)$ est peu douteux pour $X < 12$, puisque dans ce domaine de X et tous les n utilisés [3; 4; 5; ... 10; ∞], les expressions approchées de $V_n(X)$ sont fort précises.

On peut se demander s'il en est encore de même pour X fini > 20 par exemple, n étant également fini mais supérieur à 10, comme on sait que $J_0(X)$ est alors mal représenté par (58). Les formules (56) et (60) montrent facilement qu'alors $V_n(X)$ est petit devant 1, et il doit effectivement bien en être ainsi par raison de continuité suivant n . L'erreur commise par application de (56) est donc de toute façon petite en valeur absolue et n'aura pas de répercussion dans la précision de l'intégration. Si maintenant, X étant > 12 , on fait tendre n vers l'infini, l'erreur devient plus importante mais est sans conséquence dans l'intégration si les fonctions arguments (l'angle d'attaque) sont à variations bornées, ce qui sera évidemment le cas, et si la condition (57) est respectée; or elle l'est, comme nous l'avons vu. En définitive, l'approximation est bonne quel que soit $X < 12$, le noyau $V_n(X)$ étant considéré comme fonction, et bonne de toute façon comme distribution avec des fonctions arguments à variations bornées.

5. Approximation du noyau instationnaire lorsque $\frac{k}{n}$ n'est pas grand.

Possédant une approximation du noyau stationnaire, il suffit de porter son expression dans (14) pour avoir celle du noyau instationnaire; mais on perd alors le bénéfice de la simplicité analytique de (56) à cause du terme intégrale. On note alors que la transformation indiquée en (14), appliquée au problème plan, qui correspond au cas asymptotique $n \rightarrow \infty$, revient à changer la variable x en $x\sqrt{1 + \left(\frac{kM}{n\beta}\right)^2}$ dans l'expression du noyau stationnaire et à multiplier celui-ci par $\exp\left(-j\frac{kM^2}{\beta^2}x\right)$, β étant supposé non voisin de zéro, on voit que cette transformation tend vers la transformation identique si $\left(\frac{k}{n}\right)$ tend vers zéro. On vérifie que cela

est également vrai pour le cylindre, même si n n'est pas grand; la continuité en $\left(\frac{k}{n}\right)$ est en effet visible dans la transformation (14) : $\exp\left(-j \frac{k M^2}{\beta^2} x\right) \rightarrow 1$ pour x fini, et $\frac{k M}{\beta^2} J_1\left(\frac{k M}{\beta^2} u\right)$ converge vers zéro. On peut alors se demander si la transformation élémentaire valable pour le problème plan est encore acceptable pour le problème cylindrique pour les valeurs non trop grandes de $\frac{k}{n}$.

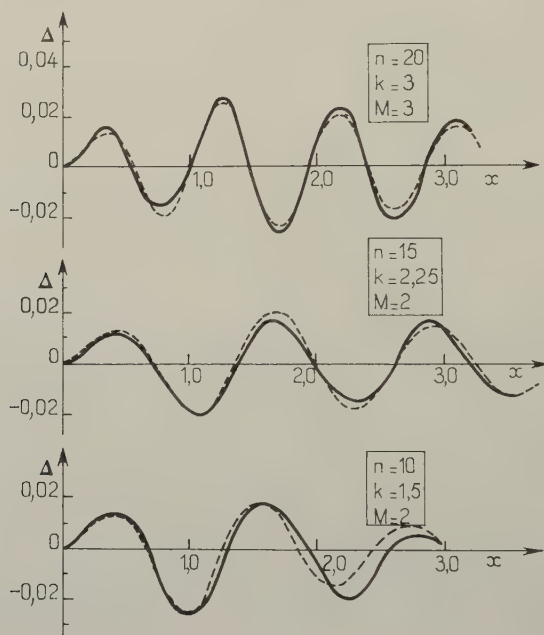


Fig. 18.

$$\begin{aligned} \text{—} \quad \Delta_{\text{exact}} &= \Im \left[W_n(x) e^{j \frac{k M^2}{\beta^2} x} - W_{n,0}(x) \right]; \\ \text{---} \quad \Delta_{\text{approché}} &= \left[V_n\left(\frac{x}{\beta}\right) - V_n\left(\frac{x}{\beta} \sqrt{1 + \left(\frac{k M}{n \beta}\right)^2} \right) \right]. \end{aligned}$$

La vérification ne peut évidemment se faire quel que soit n qu'avec l'expression approchée de $W_{n,0}(x_0)$; elle a été faite numériquement dans les conditions suivantes. On a considéré les valeurs de $n \geq 10$, de $M \geq 2$, et des valeurs de k supérieures aux valeurs pratiques; précisons :

$$\begin{aligned} k &= 1,5, \quad 2,25 && \text{pour } M = 2; \\ k &= 3 && \text{pour } M = 3. \end{aligned}$$

D'après (14), si la nouvelle approximation proposée est convenable, on doit avoir sensiblement

$$(61) \quad W_{n,0} \left[x \sqrt{1 + \left(\frac{kM}{n\beta} \right)^2} \right] - W_{n,0}(x) \\ \simeq \frac{kM}{\beta^2} \int_0^x W_{n,0}(\sqrt{x^2 - u^2}) J_1 \left(\frac{kM}{\beta^2} u \right) du$$

ou bien :

$$(62) \quad V_n \left[\frac{x}{\beta} \sqrt{1 + \left(\frac{kM}{n\beta} \right)^2} \right] - V_n \left[\frac{x}{\beta} \right] \\ \simeq \frac{kM}{\beta^2} \int_0^x V_n \left(\frac{1}{\beta} \sqrt{x^2 - u^2} \right) J_1 \left(\frac{kM}{\beta^2} u \right) du.$$

On a calculé directement les deux membres de (62), où le second membre, c'est-à-dire le terme intégrale, représente l'écart

$$\Delta x = \beta \left[W_n(x) e^{j \frac{kM^2}{\beta^2} x} - W_{n,0}(x) \right] = \frac{W_n(x) e^{j \frac{kM^2}{\beta^2} x} - W_{n,0}(x)}{\sup W_{n,0}(x)}.$$

Dans les cas numériques considérés (fig. 18), cet écart Δx ne dépasse pas 0,03, et son approximation par le premier membre de (62) n'en diffère que de

$$\delta(x) = \left\{ V_n \left[\frac{x}{\beta} \sqrt{1 + \left(\frac{kM}{n\beta} \right)^2} \right] - V_n \left[\frac{x}{\beta} \right] \right\} \\ - \frac{kM}{\beta^2} \int_0^x V_n \left[\frac{1}{\beta} \sqrt{x^2 - u^2} \right] J_1 \left(\frac{kM}{\beta^2} u \right) du.$$

D'après la figure 19, on voit que

$$\sup |\delta(x)| < \frac{1}{5} \sup |\Delta x|.$$

Donc, l'approximation :

$$(63) \quad W_n(x) = - \frac{e^{-j \frac{kM^2}{\beta^2} x}}{\beta} V_n \left[\frac{x}{\beta} \sqrt{1 + \left(\frac{kM}{n\beta} \right)^2} \right]$$

entraîne une erreur qui, rapportée à $\sup W_{n,0}(x)$, ne dépasse pas 0,005 pratiquement. Elle est inférieure à l'erreur commise sur

$V_n \left[\frac{x}{\beta} \sqrt{1 + \left(\frac{kM}{n\beta} \right)^2} \right]$ en adoptant l'expression (56) avec les expres-

sions (60) des paramètres. Il serait donc illusoire de lui préférer pour des raisons de précision la transformation (14).

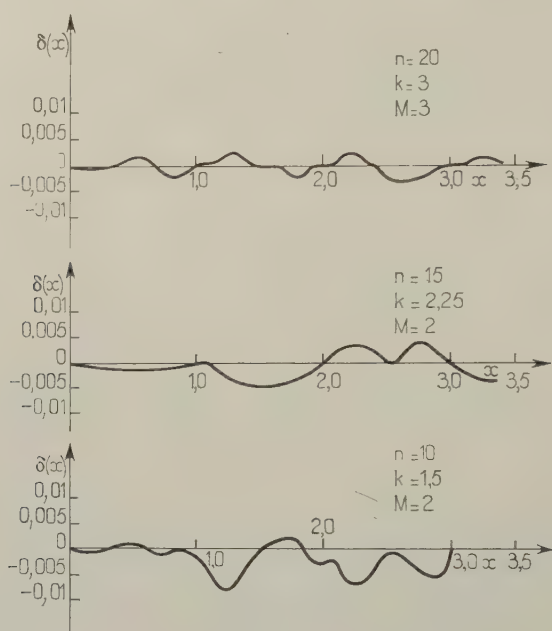


Fig. 19.

$$\delta(x) = \beta W_n(x) e^{j \frac{k M^2}{\beta^2} x} + V_n \left(\frac{x}{\beta} \sqrt{1 + \left(\frac{k M}{n \beta} \right)^2} \right) = \Delta_{\text{exact}} - \Delta_{\text{approché}}.$$

6. Conclusion.

Après avoir vérifié qu'avec une combinaison linéaire de deux exponentielles, on pouvait, et de façon très satisfaisante, approcher les fonctions $V_n(X)$ pour $X < 20$, on a représenté de la même manière la fonction $J_n(X)$ que l'on a montré être la fonction limite vers laquelle tendait $V_n(X)$, lorsque $n \rightarrow \infty$, en s'attachant à ce que l'expression approchée définisse exactement un dirac en tant que distribution. On note alors des évolutions des paramètres figurant dans les expressions approchées de $V_n(X)$, en fonction de n , qui sont très progressives, et que l'on peut lisser avec des fonctions très plates. On en a déduit une fonction de n et de $\left(\frac{x n}{\beta}\right)$ qui approche $W_{n,0}(x)$ quels que soient x et n , l'erreur apportée étant très faible, quel que soit n , pour $\frac{n x}{\beta} < 12$. Cette fonction définit pour tout $n > 3$ une distribution approchée précise à l'égard des fonctions arguments à variations bornées.

On peut remarquer que Luke [15] a déjà proposé l'approximation exponentielle de $W_{n,0}(x)$ par une technique systématique, mais elle fait intervenir un nombre de termes lié à n et au moins égal à ce nombre, tandis qu'ici, on aboutit par une voie semi-empirique à une représentation exponentielle toujours limitée à deux termes.

On a ensuite montré que l'on pouvait représenter de façon non moins précise pour les problèmes de flottement, le noyau instationnaire par la formule très simple (63), où la fonction $V_n(X)$ est remplacée par l'approximation exponentielle. On dispose finalement ainsi, d'un noyau stationnaire d'expression analytique commode et suffisamment précis qui va permettre maintenant des calculs de flottement à des valeurs de n éventuellement beaucoup plus élevées que $n = 10$, et telles qu'on en trouve dans les flottements recherchés, et obtenus, en soufflerie.

BIBLIOGRAPHIE.

- [1] ANDERSON, W. J et FUNG, Y. C., *The effects of idealized boundary layer on the flutter of cylindrical shells in supersonic flow* (Graduate of Aeronautical Cabs., California Inst. of Techn. Struct. Dynam., Rep. 62-49, 1962).
- [2] FUNG, Y. C., *Some recent contributions to panel flutter Research* (A. I. A. A. Journal, vol. 1, n° 4, 1963, p. 898-909).
- [3] MILES, J. W., *Supersonic flutter of a cylindrical shell. Part. I* (J. A. S., vol. 24, 1957, p. 107-118).
- [4] LEONARD, R. W. et HEDGEPEETH, J. M., *On panel flutter and divergence of infinitely long unstiffened and ring stiffened thin-walled circular cylinder* (N. A. C. A. Rep. 1302, 1957).
- [5] VOSS, H. M., *The effects of an external supersonic flow on the vibration characteristics of thin-walled cylindrical shells* (J. A. S., vol. 28, 1961, p. 945-956).
- [6] KRUMHAAR, A., *Supersonic flutter of a cylindrical shell of finite length in an axisymmetric mode* (International Journal of Solids and Structures, vol. 1, 1965, p. 23).
- [7] JOHNS, D. J., *Supersonic flutter of cylindrical shells* (College of Aeronautics, Note n° 104, 1960).
- [8] HOLT, M. et STRACK, S. L., *Supersonic panel flutter of a cylindrical shell of finite length* (J. A. S., vol. 28, 1961, p. 197-268).
- [9] DAVIES, D. E., *Generalized Airforces on a cylindrical shell oscillating harmonically in a uniform flow* (R. A. E., T. R. n° 65295, 1965).
- [10] DZYGADLO, Z., *Self excited vibration of a cylindrical shell of finite length in a supersonic flow* (Proceedings of vibration Problems, Polish Academy of Sciences, vol. 3, n° 1, 1962, p. 69-88).
- [11] STEARMAN, R., *Research on panel flutter of cylindrical shells* (Midwest Research Institute, A. F. S. O. R., Rep. 64-0074, 1964).
- [12] COUPRY, G., *Sur le calcul du potentiel des vitesses d'un écoulement supersonique en présence des vibrations asymptotiques d'un cylindre* (C. R. Acad. Sc., t. 265, série A, 1967, p. 873).
- [13] DZYGADLO, Z., *Pressure on a cylindrical shell performing unsteady oscillation in external or internal linearized supersonic flow* (Proceeding of vibration Problems, Warsaw, 2, 9, 1968, p. 129-145).
- [14] RANDALL, D. G., *Supersonic flow past quasi cylindrical bodies of almost circular cross-section* (Aeronaut. Research Council, T. R., n° 3067, 1958).

- [15] LUKE, Y. L., *Approximate inversion of a class of Laplace transforms applicable to supersonic flow problems* (Quart. Journ. of Mech. and appl. Math., vol. 17, 1964, p. 91-103).
- [16] DOWELL, E. H. et WIDNALL SHEILA E., *Generalized aerodynamic forces of an oscillating cylindrical shell* (Quart. of Applied Math., vol. 24, n° 1, 1966, p. 1-17).
- [17] OLSON M. D. et FUNG Y. C., *Supersonic flutter of cylindrical shells subjected to internal pressure and axial compression* (A. I. A. A. Journal, vol. 4, n° 5, 1966, p. 858-864).
- [18] DAT, R., *Influence de la couche limite sur le flottement d'un panneau plan en supersonique faible* (O. N. E. R. A., N. T. n° 116, 1967).
- [19] FRAENKEL, L. E., *On the operational form of linearized equation of supersonic flow* (J. A. S., vol. 20, 1953, p. 647-648).
- [20] MILES, J. W., *The potential theory of unsteady supersonic flow*, University Press, Cambridge, 1959.
- [21] WATSON, G. N., *Theory of Bessel functions*, Cambridge University Press, 1948, p. 252-267).
- [22] OLVER, F. W. J., *The asymptotic solution of linear differential equations of the second order for large values of a parameter* (Philosophical Transactions of the R. S. of London, serie A, Math. and Phys., vol. 247, n° 930, 1954, p. 328-367).
- [23] LECLERC, J., *Diverses conséquences du comportement asymptotique de $H_n^{(2)}(nz)$ pour n semi-entier tendant vers l'infini* (C. R. Acad. des Sc., t. 266, série A, 1968, p. 781-784).
- [24] VALIRON, G., *Équations fonctionnelles. Applications*, Masson et C^{ie}, Paris, 1945, p. 268-273.
- [25] WITHAM, G. B., *Some comments on wave propagation and shock wave structure with application to magnetohydrodynamics* (Communications on Pure and applied Mathematics, vol. XII, 1959, p. 113-158).

(Manuscrit reçu le 7 février 1969.)

PARIS — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS

55, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS

181209-70

Dépôt légal, Imprimeur, 1970, n° 1920

Imprimé en France